# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXI.**

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

**Meccanica celeste.** — *Sulle orbite periodiche.* Nota di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio SALVATORE PINCHERLE.

1. — L'orbita periodica $C_1$, la cui esistenza fu da noi stabilito nella Nota precedente [1], per le sue proprietà di minimo, non può avere punti multipli *interni* ad A. La cosa è evidente. Ma non ne può avere neppure sul contorno. Infatti, con un ragionamento da noi usato in una Nota, di prossima pubblicazione, sulle soluzioni discontinue del calcolo delle variazioni, si vedrebbe facilmente che i varî rami di $C_1$, passanti per un punto multiplo, dovrebbero avere in tal punto tutti la stessa tangente, e questo è impossibile [2], perchè su tutto A è sempre $\sqrt{U+h} > 0$ ed anche $F_1 > 0$ [3].

2. — È importante osservare che la curva $L_1$ non deve necessariamente essere costituita di un sol pezzo. *La proposizione del n. 3 vale anche se la* $L_1$ *risulta formata da due o più curve continue, chiuse, aventi le proprietà di cui al n. citato.* Anche in questo caso non possono esistere punti multipli su $C_1$.

3. — È facile vedere che la $C_1$ non può avere su $L_1$ e $L_2$ che un numero finito di punti. Infatti, se su $L_1$ ($L_2$) ne avesse un numero infinito (costituenti necessariamente un gruppo chiuso) e P fosse un punto limite di essi, su P la sua curvatura sarebbe uguale a quella di $L_1$ ($L_2$). Risultando così verificata la disuguaglianza $T < 0$ ($> 0$) non potrebbe essere verificata la 3), $T = 0$.

4. — La proporzione del n. 3 sussiste anche nei seguenti casi:

1°) *Se invece delle disuguaglianze* $T < 0$, $T > 0$, *in un gruppo riducibile di punti di* $L_1$ *e* $L_2$ *è verificata la* $T = 0$.

2°) *Se in un gruppo pure riducibile, le coordinate dei punti di* $L_1$, $L_2$, *considerate come funzioni dell'arco, mancano di derivate seconde, oppure queste non sono continue.*

3°) *Se in un numero finito di punti di* $L_1$ *e* $L_2$, *manca la tangente; purchè però in ognuno di tali punti esistano e siano continue le tangenti ai due rami della curva che concorrono in essi, e l'angolo di questi rami, che appartenne ad* A, *sia minore di* $\pi$.

Tutto ciò scende immediatamente da quanto abbiamo dimostrato nella Nota di cui si è fatto cenno al n. 1.

(1) L. Tonelli, *Sulle orbite periodiche* (Questi Rendiconti, 1° sem., pag. 251).

(2) Cfr. Bolza, *Lectures on the Calculus of Variations*, 1904 (Chicago), pag. 125.

(3) Ricordiamo che è $F_1 = \frac{Fx'x'}{y'^2} = \cdots$ con $F = \sqrt{U+h}\,\sqrt{x'^2+y'^2}$.

5. — Sia, ancora, $L_1$ una curva chiusa tale che le due coordinate, come funzioni dell'arco, siano continue insieme alle loro derivate dei primi due ordini. In prossimità di $L_1$ e per tutti i punti esterni a tale curva, *la* $U(xy) + h$ *sia positiva,* ed inoltre, continua insieme alle due derivate parziali dei primi due ordini. *Sia poi*

$$\text{(4)} \qquad \operatorname*{him}_{R=\infty} R\sqrt{U(x\,,y)+h} = \infty\,,$$

dove R indica la distanza del punto $(x\,,y)$, nel quale si calcola la $\sqrt{U+h}$, dall'origine delle coordinate. Allora
*se sulla* $L_1$ *è sempre*

$$T \equiv 2\,\frac{U+h}{\varrho} - \frac{\partial U}{\partial n} < 0\,,$$

*esiste certamente un'integrale periodico dell'equazione differenziale* $T = 0$, *ossia un'orbita periodica per il problema dinamico considerato.*

Quest'orbita circonda la curva $L_1$.

Sia $\bar{L}$ una qualunque curva continua, rettificabile, che circonda $L_1$, e si indichi con N un numero positivo maggiore dell'integrale

$$\int_{\bar{L}} \sqrt{U+h}\,ds\,.$$

In base alla (4) è possibile determinare un numero positivo $R_1$, tale che per ogni $R \geq R_1$ sia

$$\text{(5)} \qquad R\sqrt{U+h} > N\,.$$

Questo $R_1$ lo sceglieremo in modo che il cerchio $(O\,,R_1)$, avente il centro nell'origine degli assi ed il raggio uguale a $R_1$, contenga nel suo interno tutta la curva $L_1$. Sia, ora, $L'$ una curva continua, chiusa, rettificabile, circondante la $L_1$ ed avente un punto sulla circonferenza $(O\,,R_2)$, con $R_2 > 2R_1$. La lunghezza di quella parte di $L'$ che trovasi nella corona circolare limitata dalle circonferenze $(O\,,R_1)$, $(O\,,R_2)$, è di certo maggiore di $2(R_2 - R_1)$; e il contributo di questa parte nell'integrale

$$\int_{L'} \sqrt{U+h}\,ds$$

è, per la (5) maggiore di

$$2(R_2 - R_1)\,\frac{N}{R_2}\,.$$

Si ha così

$$\text{(6)} \qquad \int_{L'} \sqrt{U+h\,ds} > 2(R_2 - R_1)\,\frac{N}{R_2} = 2N - 2N\,\frac{R_1}{R_2} > N\,.$$

Ciò posto, consideriamo tutte le curve continue chiuse, rettificabili, appartenenti al campo limitato dalla curva $L_1$ e dal cerchio $(O, R_2)$, e circondante $L_1$. Ripetendo le considerazioni già fatte al n. 4 della Nota I, si dimostra subito che fra esse ve n'è almeno una $C_1$ che rende minimo l'integrale di $\sqrt{U+h}$. Con ragionamenti identici a quelli dei nn. 6 e 7 della stessa Nota si dimostra poi che la curva $C_1$ soddisfa all'equazione differenziale $T=0$ in tutti i punti *interni* al campo qui considerato ed anche in quelli appartenenti a $L_1$. E osservando che la $C_1$ non può avere punti sulla circonferenza $(O, R_2)$ — perchè, se ne avesse uno solo, sarebbe per la (6)

$$\int_{C_1} \sqrt{U+h}\, ds > N > \int_{L} \sqrt{U+h}\, ds\,,$$

contro l'ipotesi che la $C_1$ dia il minimo per l'integrale di $\sqrt{U+h}$ — si conclude che tutta la curva $C_1$ soddisfa all'equazione differenziale $T=0$. La proposizione enunciata è quindi pienamente stabilita —.

6. — Nel numero precedente, non solo abbiamo stabilito l'esistenza di almeno un'orbita periodica. ma abbiamo anche determinato un cerchio dentro il quale deve certamente trovarsi una di tali orbite.

7. — Per la proporzione dimostrata al n. 5 possono ripetersi osservazioni analoghe a quelle dei nn. 1, 2, 3, 4.

8. — *Tutte le orbite delle quali qui si è stabilita l'esistenza, sono, secondo un teorema del Poincaré, orbite instabili di prima categoria* (Ved. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*; T. III pag. 232).

## Meccanica celeste. — *Determinazione matematica dello schiacciamento polare di Giove.* Nota dell'ing. Giuseppe Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

### Introduzione.

È noto che le osservazioni dirette, eseguite fin qui sullo schiacciamento polare di Giove, sono riuscite un poco discordanti. Prendendo per unità il semidiametro equatoriale, la misura del semidiametro polare oscilla dal valore 0,941 del Kaiser al valore 0,934 dell'Herschel. Nel 1892 il Barnard scoprì un nuovo satellite di Giove situato tanto vicino al pianeta principale da essere trascurabili le perturbazioni prodotte nel suo moto dall'attrazione del Sole e degli altri satelliti; e il Cohn (Astr. Nach., 3403) vide subito la possibilità di risalire dalle sue perturbazioni alla determinazione mate-