ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Ciò posto, consideriamo tutte le curve continue chiuse, rettificabili, appartenenti al campo limitato dalla curva L_1 e dal cerchio (O, R_2), e circondante L_1. Ripetendo le considerazioni già fatte al n. 4 della Nota I, si dimostra subito che fra esse ve n'è almeno una C_1 che rende minimo l'integrale di $\sqrt{U + h}$. Con ragionamenti identici a quelli dei nn. 6 e 7 della stessa Nota si dimostra poi che la curva C_1 soddisfa all'equazione differenziale $T = 0$ in tutti i punti *interni* al campo qui considerato ed anche in quelli appartenenti a L_1. E osservando che la C_1 non può avere punti sulla circonferenza (O, R_2) — perchè, se ne avesse uno solo, sarebbe per la (6)

$$\int_{C_1} \sqrt{U + h}\, ds > N > \int_{L} \sqrt{U + h}\, ds\,,$$

contro l'ipotesi che la C_1 dia il minimo per l'integrale di $\sqrt{U + h}$ — si conclude che tutta la curva C_1 soddisfa all'equazione differenziale $T = 0$. La proposizione enunciata è quindi pienamente stabilita —.

6. — Nel numero precedente, non solo abbiamo stabilito l'esistenza di almeno un'orbita periodica. ma abbiamo anche determinato un cerchio dentro il quale deve certamente trovarsi una di tali orbite.

7. — Per la proporzione dimostrata al n. 5 possono ripetersi osservazioni analoghe a quelle dei nn. 1, 2, 3, 4.

8. — *Tutte le orbite delle quali qui si è stabilita l'esistenza, sono, secondo un teorema del Poincaré, orbite instabili di prima categoria* (Ved. H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste*; T. III pag. 232).

Meccanica celeste. — *Determinazione matematica dello schiacciamento polare di Giove.* Nota dell'ing. GIUSEPPE ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

INTRODUZIONE.

È noto che le osservazioni dirette, eseguite fin qui sullo schiacciamento polare di Giove, sono riuscite un poco discordanti. Prendendo per unità il semidiametro equatoriale, la misura del semidiametro polare oscilla dal valore 0,941 del Kaiser al valore 0,934 dell'Herschel. Nel 1892 il Barnard scoprì un nuovo satellite di Giove situato tanto vicino al pianeta principale da essere trascurabili le perturbazioni prodotte nel suo moto dall'attrazione del Sole e degli altri satelliti; e il Cohn (Astr. Nach., 3403) vide subito la possibilità di risalire dalle sue perturbazioni alla determinazione matematica dello schiacciamento in questione ([1]); ma a quanto mi risulta nessuno s'era fin qui accinto all'opera.

Io mi sono servito della teoria classica di Laplace semplificandola però con l'ammettere che la superficie di Giove sia superficie d'equilibrio, ed ho spinto l'approssimazione molto al di là di quel che abbia fatto il Laplace nella teoria degli antichi satelliti, tenendo anche conto del secondo termine della funzione perturbatrice dovuta allo schiacciamento polare. Le formole a cui giungo sono molto complicate, perchè per maggiore esattezza conservo anche le seconde potenze dell'eccentricità. Il risultato è il seguente:

a) Media delle osservazioni 0,9378

b) Valore calcolato del semidiametro polare . . . 0,9377

Nella deduzione matematica, che si fa con altro metodo, dello schiacciamento terrestre dalle ineguaglianze lunari non si giunge a valori tanto precisi ([2]).

Equazioni fondamentali.

Consideriamo Giove come un ellissoide di rotazione e siano A il semidiametro equatoriale e B il semidiametro polare; quanto alla densità interna supporremo:

a) che la superficie esterna del pianeta sia superficie d'equilibrio;

b) che la distribuzione interna delle masse sia simmetrica rispetto al piano equatoriale e identica per tutte le sezioni meridiane.

Prendiamo il centro di Giove come origine d'una terna di assi ortogonali x, y, z, tali che il piano xy sia parallelo al piano dell'eclittica di una data epoca: l'asse x sia diretto verso l'equinozio di primavera, e l'asse z verso il polo nord dell'eclittica stessa; chiamando con M la massa di Giove

([1]) Il Cohn lascia inoltre supporre che dalle perturbazioni del satellite possa un giorno dedursi la distribuzione delle masse nell'interno di Giove; ciò che sarà sempre impossibile con questo solo dato. Cfr. su questo proposito la Nota del prof. Lauricella: *Sulla distribuzione delle masse nell'interno dei pianeti* (R. Acc. Lincei, XXI, 1), dove il ch. autore dimostra che anche tenendo conto del moto intorno al baricentro, resta sempre nel $\Delta^2\varrho$ una funzione arbitraria π.

Notiamo anche: il Cohn tentò effettivamente la determinazione dello schiacciamento in questione, ma avendo adoperato un metodo troppo grossolano (data specialmente la piccola distanza che separa il satellite del pianeta) giunse ad un risultato che non è in accordo con le osservazioni.

([2]) La bibliografia del V satellite è estesa. Citiamo: Tisserand, C. Rendus, CXVII e CXIX; Cohn *Bestimmung der Bahnelemente des V Jupitersmondes*, Astr. Nach., 3403; Barnard, *On the fifth satellite of Jupiter*, Astr. Journal 544; Dobbin, *Orbit of the fifth satellite of Jupiter*, ibid., 562; ecc.

e con μ la massa del satellite, il potenziale esercitato da Giove nel punto ov' è il satellite sarà

$$P = f\,\frac{M}{r} + R,$$

essendo R un termine correttivo molto piccolo dovuto al non essere il pianeta perfettamente sferico ed omogeneo.

Ciò posto è noto che, essendo M estremamente grande di fronte a μ, le equazioni differenziali del moto del satellite saranno con grandissima approssimazione

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + fM\,\dfrac{x}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{d^2y}{dt^2} + fM\,\dfrac{y}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dt^2} + fM\,\dfrac{z}{r^3} = \dfrac{\partial R}{\partial z}\,. \end{cases}$$

Trascurando dapprima le derivate di R integreremo il sistema (1) introducendo le sei note costanti del moto $a\,e\,\varphi\,\vartheta\,\omega\,\varepsilon$ (distanza media, eccentricità, inclinazione, longitudine del nodo ascendente, longitud. del perigiove, epoca); faremo poi variare queste costanti in modo da tener conto dei secondi membri. Adoperando metodi noti, vediamo che a e ed ω soddisfano alle equazioni

$$(2)\qquad \frac{da}{dt} = \frac{2}{na}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}$$

$$(3)\qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\,\frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial e},$$

$$(4)\qquad \frac{de}{dt} = -\frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial \omega} - (1-e^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{1-(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e}\,\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},$$

dove $n = \dfrac{\sqrt{fM}}{a^{\frac{3}{2}}}$ è il moto medio.

Sviluppo della funzione perturbatrice.

Cerchiamo ora l'espressione di R (funzione perturbatrice) per mezzo dei sei noti elementi e del tempo. Se adottiamo per il momento un sistema di coordinate polari, prendendo per origine il centro di Giove e per asse polare l'asse di rotazione, sviluppando P in funzioni sferiche abbiamo:

$$P = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}$$

dove, per l'ipotesi *b*), si ha, com'è noto, $Y_{2K+1} = 0$. Essendo poi $Y_0 = Mf$ abbiamo

$$R = \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{Y_{2m}}{r^{2m+1}}\,. \tag{5}$$

Il Laplace nella teoria degli antichi satelliti di Giove, mostra essere sufficiente il considerare solo il primo termine della (5); ma noi per maggiore esattezza calcoleremo con approssimazione anche il secondo. E intanto l'ipotesi *a*) ci dice che Y_2 dipende soltanto dalla forma esterna di Giove, dalla sua massa e dal rapporte χ tra la forza centrifuga e la gravità all'equatore (rapporto noto trattandosi di un pianeta che ha satelliti e di cui si conosce il diametro equatoriale e la durata di una rotazione) e che precisamente chiamando con δ l'angolo che il raggio vettore, che unisce il centro di Giove col satellite, forma col piano equatoriale, si ha [1]:

$$Y_2 = MfA^2\left(\frac{A-B}{A} - \frac{1}{2}\chi\right)\left(\frac{1}{3} - \mathrm{sen}^2\delta\right).$$

Chiamando ora con y_4 il valore di Y_4 nel caso di Giove omogeneo porremo con approssimazione $y_4 = Y_4$ ciò che non altera la (5) considerando il piccolo coefficiente $\frac{1}{r^5}$ per cui Y_4 viene moltiplicato. Abbiamo allora indicando con ϱ la densità media di Giove [2]:

$$Y_4 = \frac{4\pi\varrho f}{35}\left[\frac{35}{8}\,\mathrm{sen}^4\delta - \frac{15}{4}\,\mathrm{sen}^2\delta + \frac{3}{8}\right]A^7\left(\frac{A^2-B^2}{A^2}\right)^2\left(1-\frac{A^2-B^2}{A^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Eliminiamo ora δ: chiamando perciò con Φ e θ l'inclinazione e la longitudine del nodo ascendente dell'equatore di Giove abbiamo con grandissima approssimazione data la piccolezza di δ e φ

$$\delta = \varphi\,\mathrm{sen}\,(nt-\vartheta) - \Phi\,\mathrm{sen}\,(nt-\theta)$$

$$\delta^2 = \varphi^2\,\mathrm{sen}^2(nt-\vartheta) + \Phi^2\,\mathrm{sen}^2(nt-\theta) - 2\Phi\varphi\,\mathrm{sen}\,(nt-\vartheta)\,\mathrm{sen}\,(nt-\theta) =$$

$$= \varphi^2\left[\frac{1-\cos 2\,(nt-\vartheta)}{2}\right] + \Phi^2\left[\frac{1-\cos 2\,(nt-\theta)}{2}\right] -$$

$$-\,\Phi\varphi\left[\cos(\theta-\vartheta) - \cos(2nt-\theta-\vartheta)\right].$$

[1] Tisserand, *Mécan. cel.*, II, 210.
[2] Tisserand, op. cit., II, 322.

Si ha pure [1]

$$(6)\qquad \left(\frac{r}{a}\right)^{-m} = 1 + \frac{(m-1)\,m}{(1)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{(m+1)\,m\,(m-1)\,(m-2)}{(1\,.\,2)^2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \cdots$$
$$+ \text{ termini periodici.}$$

Essendo nostro scopo lo studiare le perturbazioni secolari dobbiamo attenerci soltanto ai termini non periodici. Elimineremo la f mediante la

$$\mathrm{M}f = n^2 a^3\,;$$

ed essendo e e φ quantità molto piccole ne tralasceremo le potenze superiori alla seconda. Indicando allora con R_s l'insieme dei termini secolari contenuti in R, e ponendo per brevità $\theta - \vartheta = \beta$ avremo con facili calcoli:

$$(7)\qquad \mathrm{R}_s = \mathrm{A}^2\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}\chi\right) n^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\Phi^2 + \Phi\varphi\cos\beta\right) +$$
$$+ \frac{3\varrho\pi n^2}{70\mathrm{M}a^2}(1+5e^2)\left[1 - 10\left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi\varphi\cos\beta\right)\right] \times$$
$$\times \mathrm{A}^7\left(\frac{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}\right)^2\left(1 - \frac{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

formola dove entrano solo gli elementi ellittici e gli elementi determinativi dell'equatore di Giove.

Equazione delle perturbazioni.

Sostituendo questo valore di R nelle (2) (3) e nella (4) abbiamo:

$$(8)\qquad \frac{d\omega}{dt} = \frac{n\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}}{a^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}\left\{\frac{3\varrho\pi}{7\mathrm{M}a^2}(1+5e^2)(\Phi\cos\beta - \varphi)\,\times\right.$$
$$\left.\times \mathrm{A}^7\left(\frac{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}\right)^2\left(1-\frac{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{A}^2\left(\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}\chi\right)(\Phi\cos\beta - \varphi)\right\} +$$
$$+ \frac{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{a^2}\left\{\frac{3\varrho\pi}{7\mathrm{M}a^2}\left[1 - 10\left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi\varphi\cos\beta\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times \mathrm{A}^7\left(\frac{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}\right)^2\left(1-\frac{\mathrm{A}^2-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \mathrm{A}^2\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}} - \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}\chi\right)\right\},$$

$$(9)\qquad \frac{da}{dt} = 0 \qquad\qquad a = \text{costante}$$

$$(9')\qquad \frac{de}{dt} = 0\,. \qquad\qquad e = \text{costante}$$

La (9) ci dice che l'asse maggiore dell'orbita ellittica non ha perturbazioni secolari di prim'ordine ciò ch'è in accordo col noto teorema di Poisson-Laplace sulla stabilità del sistema planetario.

[1] Tisserand, op. cit., I, 239.

Per integrare la (8) osserviamo che le quantità A , B , M , χ , ϱ , a , e (e quindi n), sono costanti mentre, $\Phi , \theta , \varphi , \vartheta$ variano lentamente col tempo. Estendendo l'integrazione ad un intervallo di tempo molto breve (per es. un giorno solare medio che prendiamo come unità di tempo) potremo, secondo il metodo di Laplace, sostituire a θ , Φ , ϑ , φ, i loro valori medî; e considerare quindi il secondo membro come costante. Se indichiamo con γ lo spostamento diurno del perigiove e scegliamo come unità di lunghezza il semidiametro equatoriale A, avremo con brevi calcoli

$$\frac{a^2\gamma}{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 - \mathrm{B} - \frac{1}{2}\chi - \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(\varphi - \Phi\cos\beta) \times \left\{\frac{3\varrho\pi}{7\mathrm{M}a^2}(1+5e^2)(1-\mathrm{B}^2)^2\,\mathrm{B} + 1 - \mathrm{B} - \frac{1}{2}\chi\right\} + \frac{3\varrho\pi}{7\mathrm{M}a^2}(1-\mathrm{B}^2)^2\,\mathrm{B}\left[1 - 10\left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi\varphi\cos\beta\right)\right]$$

da cui

$$\frac{a^2\gamma}{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} = (\mathrm{B}^5 - 2\mathrm{B}^3 + \mathrm{B})\frac{3\varrho\pi}{7\mathrm{M}a^2}\left\{1 - 10\left(\frac{\varphi^2}{2} + \frac{\Phi^2}{2} - \Phi\varphi\cos\beta\right) - \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(\varphi - \Phi\cos\beta)(1+5e^2)\right\} - \mathrm{B}\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(\varphi - \Phi\cos\beta)\right] - \frac{1}{2}\chi\left[1 - \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(\varphi - \Phi\cos\beta)\right] + 1 - \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(\varphi - \Phi\cos\beta),$$

e infine

$$\text{(10)}\quad \mathrm{B}^5 - 2\mathrm{B}^3 + \mathrm{B}\left\{1 - \frac{1 - \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(\varphi - \Phi\cos\beta)}{\dfrac{3\varrho\pi}{7\mathrm{M}a^2}\left[1 - \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(1+5e^2)(\varphi - \Phi\cos\beta) - 10\left(\dfrac{\varphi^2}{2} + \dfrac{\Phi^2}{2} - \Phi\varphi\cos\beta\right)\right]}\right\} + \frac{1 - \dfrac{1}{2}\chi\left[1 - \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(\varphi - \Phi\cos\beta) - \dfrac{a^2\gamma}{n(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} - \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(\varphi - \Phi\cos\beta)\right]}{\dfrac{3\varrho\pi}{7\mathrm{M}a^2}\left[1 - \dfrac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{1-e^2}(1+5e^2)(\varphi - \Phi\cos\beta) - 10\left(\dfrac{\varphi^2}{2} + \dfrac{\Phi^2}{2} - \Phi\varphi\cos\beta\right)\right]} = 0.$$

Siamo così giunti ad una equazione algebrica di 5° grado, di cui possiamo calcolare i coefficienti; la quale, risoluta, ci dà il valore di B.

Riduzione dell'equazioni (3) e (4) ad equazioni lineari.

Con alcune sostituzioni sono riuscito a dar forma più semplice alle (3) e (4). Indicando con b e c due costanti e ricordando, che, essendo e e φ quantità molto piccole, noi ne possiamo trascurare le potenze superiori alla seconda avremo, tralasciando anche il termine $e^2\,\Phi^2$

$$R_s = b\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\varphi^2-\frac{1}{2}\Phi^2+\Phi\varphi\cos\beta\right)+ \\ + c(1+5e^2-5\varphi^2-5\Phi^2+10\,\Phi\varphi\cos\beta).$$

Poniamo ancora

$$e\,\mathrm{sen}\,\omega = x \qquad \varphi\,\mathrm{sen}\,\vartheta = z$$
$$e\cos\omega = y \qquad \varphi\cos\vartheta = w$$

ricordando che si ha $\beta = \theta - \vartheta$ la R_s diviene

$$R_s = \frac{b}{3}+c+\left(\frac{b}{2}+5c\right)[x^2+y^2-z^2-w^2-\Phi^2+2\Phi(w\cos\theta - z\,\mathrm{sen}\,\theta)].$$

Poniamo, sempre per brevità, $\dfrac{b+10c}{na^2}=m$, trascurando sempre i termini di grado superiore al secondo in e e φ, otteniamo dalla (3) e dalla (4) con brevi calcoli:

$$\frac{dx}{dt}-my=0 \qquad \frac{dy}{dt}+mx=0\,.$$

Essendo m una costante nota otteniamo subito x ed y e quindi e e ω; è questa un'altra via per giungere al risultato.

Conclusione.

I più esatti valori degli elementi e di γ sono quelli dati da E. E. Dobbin (loc. cit.) per il 1903, sett. 8,25; adoperando i quali per calcolare i coefficienti della (10) otteniamo

$$B^5 - 2B^3 - 19{,}336\,B + 19{,}055 = 0 \tag{11}$$

la quale equazione ha una sola radice compresa tra 0 e 1. Approssimandosi ad essa col metodo di Newton troviamo $B = 0{,}9377$.

Paragonando questo valore con quello trovato dai più abili osservatori abbiamo la seguente

TABELLA

Osservatore	Autorità	Strumento	Valore di B
Arago	Astr. Populaire IV, 322	Micrometro	0,940
John Herschel	Outlines of Astr. 512	Microm. ed eliom.	0,934
Schur	Valentiner	» »	0,938
Bessel	Handwort. der Astr.	» »	0,936
Kaiser.	» »	Eliometro »	0,941

Media delle osservazioni 0,9378
Valore calcolato 0,9377

Differenza 0,0001

L'accordo non potrebbe essere più completo: adotteremo quindi 0,93775 come il valore migliore del semidiametro polare B.

Economia matematica. — *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrisp. M. PANTALEONI.

4. Riprendendo le notazioni e le formule della nostra Nota precedente (¹), occorre mostrare:

a) che è possibile determinare sperimentalmente la forma delle funzioni ψ_i, ovvero delle funzioni Φ_i;

b) che, supposte determinate tali funzioni, si ha il modo di scrivere le equazioni generali della dinamica economica senza ricorrere ulteriormente alla esperienza.

Cominciamo dal secondo punto. Analogamente a quanto si definisce nella Meccanica, diciamo

$$x_i - \Phi_i \qquad i = 1, 2, \ldots$$

le componenti delle forze di inerzia relative all'individuo considerato: secondo il principio di d'Alembert, le equazioni della dinamica si deducono dalle equazioni della statica, purchè alle componenti alle forze applicate (i gusti) si aggiungano le componenti delle forze d'inerzia del sistema.

(¹) Vedi pag. 259.