ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Paragonando questo valore con quello trovato dai più abili osservatori abbiamo la seguente

TABELLA

OSSERVATORE	AUTORITÀ	STRUMENTO	VALORE DI B
Arago	Astr. Populaire IV, 322	Micrometro	0,940
John Herschel	Outlines of Astr. 512	Microm. ed eliom.	0,934
Schur	Valentiner	» »	0,938
Bessel	Handwort. der Astr.	» »	0,936
Kaiser	» »	Eliometro »	0,941

Media delle osservazioni 0,9378
Valore calcolato 0,9377

Differenza 0,0001

L'accordo non potrebbe essere più completo: adotteremo quindi 0,93775 come il valore migliore del semidiametro polare B.

Economia matematica. — *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrisp. M. PANTALEONI.

4. Riprendendo le notazioni e le formule della nostra Nota precedente [1], occorre mostrare:

a) che è possibile determinare sperimentalmente la forma delle funzioni ψ_i, ovvero delle funzioni Φ_i;

b) che, supposte determinate tali funzioni, si ha il modo di scrivere le equazioni generali della dinamica economica senza ricorrere ulteriormente alla esperienza.

Cominciamo dal secondo punto. Analogamente a quanto si definisce nella Meccanica, diciamo

$$x_i - \Phi_i \qquad i = 1\,, 2\,, \ldots$$

le componenti delle forze di inerzia relative all'individuo considerato: secondo il principio di d'Alembert, le equazioni della dinamica si deducono dalle equazioni della statica, purchè alle componenti alle forze applicate (i gusti) si aggiungano le componenti delle forze d'inerzia del sistema.

[1] Vedi pag. 259.

Occorre però osservare che, per poter applicare correttamente il principio di d'Alembert, occorre che nelle equazioni della statica figurino le funzioni che misurano le forze, e non già funzioni indici delle forze. Nel caso presente occorre quindi ammettere che sia vera l'ipotesi di Jevons, della misurabilità del piacere: cioè esista e sia possibile di determinare una funzione che misuri il piacere: supporre, cioè, che nelle equazioni generali (6) la funzione φ sia proprio l'ofelimità e non già una funzione indice della ofelimità.

Accettata tale ipotesi, le equazioni generali del moto di un punto economico (*homo oeconomicus*) saranno:

$$(12)\qquad \begin{cases} m x_i'' - \Phi_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \displaystyle\sum_k^{1\ldots\varrho} \lambda_k \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_i} & i = 1, 2, \ldots n \\ \psi_j = 0 & j = 1, 2, \ldots \varrho. \end{cases}$$

In particolare, se si ha

$$(13)\qquad \varrho = 1\ ,\ \psi_1 = \sum_s^{1\ldots n} p_s\, x_s - \boldsymbol{\Gamma}(t),$$

le equazioni (12) diventano

$$(14)\qquad \begin{cases} m x_i'' - \Phi_i = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \lambda p_i \\ \displaystyle\sum_s^{1\ldots n} p_s\, x_s = \boldsymbol{\Gamma}(t) \end{cases} \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

Se $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ rappresenta il reddito annuale, o mensile, o giornaliero, di un individuo, le equazioni (14) rappresentano l'impiego che egli fa del suo reddito, e mostrano come tale impiego varia col variare del reddito stesso.

5. Resta da indicare come possa farsi la determinazione sperimentale della funzione Φ_i. Basta perciò considerare un caso particolare delle formule generali (12), per es. il caso contemplato dalle formule (13), ed osservare come in tal caso procedono le cose nella realtà.

Le statistiche dei bilanci familiari ci rivelano, ove si considerino famiglie per cui il reddito varii (crescendo o decrescendo) di anno in anno, ovvero di mese in mese, ovvero di settimana in settimana, quali sono i valori di $x_1, x_2, \ldots x_n$ corrispondenti a dati valori di t compresi nell'intervallo da t_0 a t_1. Interpolando tali valori, si ottengono, sperimentalmente, i valori delle funzioni:

$$x_1(t)\ ,\ x_2(t)\ ,\ \ldots\ x_n(t)$$

e, successivamente, delle derivate prime e seconde

$$x_1'(t)\,,\, x_2'(t)\,,\, \dots\, x_n'(t)$$
$$x_1''(t)\,,\, x_2''(t)\,,\, \dots\, x_n''(t)$$

per tutti i valori di t compresi nell'intervallo da t_0 a t_1.

Osserviamo d'altra parte che il parametro λ che figura nelle formule (14) rappresenta *la tensione* del sistema economico considerato, cioè misura in ogni istante la reazione, che oppone il vincolo rappresentato dalla condizione del pareggio del bilancio. Si possono quindi determinare degli indici (per es. l'ammontare dei debiti o dei crediti in ciascun istante) che misurino i valori di λ per ogni valore di t compreso nell'intervallo considerato.

Sostituiamo allora i valori di $\lambda\,,\, x_i\,,\, x_i'\,,\, x_i''$ nelle equazioni

$$m\, x_i'' = \Phi_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \lambda p_i \qquad i = 1\,,\, 2\,,\, \dots\, n\,.$$

Essendo note le φ e le p_i, possiamo per ogni valore di t, compreso fra t_0 e t_1, calcolare i valori di

$$\Phi_1\,,\, \Phi_2\,,\, \dots\, \Phi_n\,.$$

Procedendo quindi per interpolazione otteniamo i valori di ciascuna delle Φ_i in funzione di $t|x_1\,,\, x_2\,,\, \dots\, x_n|x_1'\,,\, x_2'\,,\, \dots\, x_n'$:

$$\Phi_i(t|x_1\,,\, x_2\,,\, \dots\, x_n|x_1'\,,\, x_2'\,,\, \dots\, x_n') \qquad i = 1\,,\, 2\,,\, \dots\, n\,.$$

Il problema è così ridotto ad un ordinario problema di statistica, e precisamente di statistica matematica.

6. Riepilogando: le formule (12) riassumono le leggi del moto di un punto economico (*homo oeconomicus*), comunque vincolato. Tali leggi sono state ottenute, basandosi sopra due postulati od ipotesi fondamentali: l'ipotesi della misurabilità del piacere, ed il postulato che il moto di un punto economico sopra una varietà di indifferenza sia indipendente dalla posizione iniziale del punto stesso.

7. Si può — senza ricorrere ulteriormente a nuove ipotesi — dedurre dalle equazioni generali dell'equilibrio le equazioni della dinamica dei *sistemi economici*.

Ci limitiamo in questa Nota a considerare un caso particolare, precisamente il caso di un mercato *chiuso* (tale cioè che nessuna merce entri e nessuna merce esca) *in condizioni di libera concorrenza*.

Per fissare le idee, supponiamo che sieno m individui e tre sole merci X, Y, Z. Analogamente si tratta il caso generale in cui le merci sieno n.

Supponiamo che la merce Z sia un prodotto delle altre due X, Y. Le condizioni tecniche della produzione faranno allora conoscere le quantità

$$\varphi(z) \;,\; \psi(z) \,,$$

rispettivamente di X e di Y, occorrenti a produrre la quantità z di Z.

Diciamo

$$x_i^{(0)} \,,\, y_i^{(0)} \,,\, z_i^{(0)} \qquad i = 1 \,, 2 \,, \ldots m$$

le quantità di ciascuna merce possedute *inizialmente* dall'i^{mo} individuo,

$$x_i \,,\, y_i \,,\, z_i \qquad i = 1 \,, 2 \,, \ldots m$$

le quantità possedute dallo stesso i^{mo} individuo *in un istante generico* t;

$$\xi \,,\, \eta$$

le quantità di X e di Y impiegate a produrre Z;

$$p \,,\, q$$

i prezzi di X e di Y in unità di Z (moneta).

Sia poi

$$\varphi_i(x \,,\, y \,,\, z) \qquad i = 1 \,, 2 \,, \ldots m$$

la funzione ofelimità dell'individuo i^{mo};

$$\begin{aligned} & m_i\, x_i'' - \Phi_{1i}(t \mid x' \,,\, y' \,,\, z') \\ & m_i\, y_i'' - \Phi_{2i}(t \mid x' \,,\, y' \,,\, z') \\ & m_i\, z_i'' - \Phi_{3i}(t \mid x' \,,\, y' \,,\, z') \qquad i = 1 \,, 2 \,, \ldots m \,, \end{aligned}$$

le componenti in ogni istante delle forze d'inerzia relative all'individuo i^{mo}.

Avendo supposto che la produzione e la vendita avvengano in regime di *libera concorrenza*, le equazioni del moto si dedurranno allora dalle equazioni dell'equilibrio di Jevons-Walrass, applicando ad esse il principio analogo a quello di D'Alembert.

Si ottengono così le equazioni differenziali

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} & m_i\, x_i'' - \Phi_{1i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} - \lambda_i\, p \\ & m_i\, y_i'' - \Phi_{2i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_i} - \lambda_i\, q \qquad i = 1 \,, 2 \,, \ldots m \,, \\ & m_i\, z_i'' - \Phi_{3i} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial z_i} - \lambda_i \end{aligned} \right.$$

alle quali bisogna aggiungere le equazioni che rappresentano i vincoli del sistema: precisamente le equazioni che esprimono che il mercato è *chiuso*,

$$(16)\quad \begin{cases} \xi + \sum_i^{1\ldots m} (x_i - x_i^{(0)}) = 0 \\ \eta + \sum_i^{1\ldots m} (y_i - y_i^{(0)}) = 0 \\ \zeta - \sum_i^{1\ldots m} (z_i - z_i^{(0)}) = 0 \\ \xi = \varphi(\zeta) \;,\; \eta = \psi(\zeta) , \end{cases}$$

e le equazioni che esprimono il *pareggio dei singoli bilanci individuali*

$$p(x_i - x_i^{(0)}) + q(y_i - y_i^{(0)}) + (z_i - z_i^{(0)}) = 0 \qquad i = 1 , 2 , \ldots m .$$

Le equazioni (16) sono in numero di 5, le (17) in numero di m: esse ci permettono di esprimere $m + 5$ delle quantità

$$x_i , y_i , z_i \qquad i = 1 , 2 , \ldots m$$
$$\xi , \eta , \zeta$$
$$p , q$$

in funzione di $2m$ parametri indipendenti

$$q_1 , \ldots q_{2m} .$$

Posto

$$q_{2m+i} = \lambda_i \qquad i = 1 , 2 , \ldots m ,$$

le (15) forniscono allora un sistema di $3m$ equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine fra le funzioni incognite

$$(18) \qquad q_1 , q_2 \ldots q_{3m} .$$

Queste equazioni determinano in generale le funzioni (18) in ogni istante t, purchè, oltre ai valori iniziali

$$(19) \qquad x_i^{(0)} , y_i^{(0)} , z_i^{(0)} \qquad i = 1 , 2 , \ldots m$$

che rappresentano le quantità di ciascuna merce possedute *inizialmente* da ciascun individuo, si conoscano ancora i valori *iniziali* delle derivate

$$x_i'^{(0)} , y_i'^{(0)} , z_i'^{(0)} \qquad i = 1 , 2 , \ldots m$$

che rappresentano le variazioni iniziali delle quantità (19) in un tempo piccolissimo dt.