ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Meccanica. — *Sul teorema di Whittaker*. Nota di A. Signorini, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In un lavoro attualmente in corso di stampa, dal titolo: *Esistenza di un'estremale chiusa dentro un contorno di Whittaker* (1), ho dimostrato un teorema del calcolo delle variazioni (2) in base al quale resta perfettamente giustificato il ben noto criterio di Whittaker (3) per la ricerca di orbite periodiche. Sulla validità di tale criterio si poteva avere qualche dubbio, nel ragionamento addotto dal Whittaker per giustificarlo essendo ammessa *a priori* l'esistenza di un minimo assoluto per una funzione continua d'infinite variabili.

In questa Nota espongo la dimostrazione del teorema di Whittaker che è implicitamente contenuta nel lavoro sopra ricordato, tralasciando tutti quei particolari della dicitura e del ragionamento che servono soltanto a renderla perfettamente rigorosa. Resterà così posto bene in evidenza il metodo cui è informata tale dimostrazione, e questo può avere qualche interesse, il metodo stesso prestandosi bene anche ad altre applicazioni.

Consideriamo in un piano (x, y) il movimento di un punto sotto l'azione di una forza conservativa derivante da un potenziale $V(x, y)$. Le traiettorie di un tale sistema dinamico per le quali sia h il valore della costante dell'energia, coincideranno colle estremali dell'integrale che misura « l'azione delle forze impresse »

$$\mathfrak{A} = \int \{ h - V(x, y) \}^{\frac{1}{2}} \{ (dx)^2 + (dy)^2 \}^{\frac{1}{2}} ,$$

di modo che una curva ordinaria del piano (x, y) chiusa e senza punti angolosi ci fornirà un'orbita periodica di tale sistema dinamico per la quale

(1) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXXIII.

(2) Il mio lavoro era completamente redatto quando nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » (Tomo XXXII, fasc. 3°) è comparsa una Memoria del prof. L. Tonelli, nella quale l'A. perviene a risultati sostanzialmente identici a quelli a cui sono arrivato io nel lavoro in questione. Nondimeno non credo del tutto priva d'interesse la pubblicazione di tale lavoro e della presente Nota, perchè il metodo di cui mi sono servito è del tutto differente dal metodo delle « successioni minimizzanti » di cui si è servito il prof. Tonelli, e non è, come quello, perfettamente comprensibile altro che a chi abbia familiari molte delle più delicate questioni di analisi.

(3) Monthly Notices R. A. S., LXII, pag. 186.

sia h il valore della costante dell'energia, allora e allora soltanto che sia un'estremale chiusa dell'integrale $\mathfrak{A}$.

Dati due punti P, Q del piano (x, y), tutte le volte che essi siano stati scelti sufficientemente vicini in base a ben noti teoremi relativi ai problemi di calcolo delle variazioni definiti, potrà affermarsi che esiste un'estremale di $\mathfrak{A}$ che congiunge i punti P, Q, differisce poco dal segmento $\overline{PQ}$, e fornisce per l'integrale $\mathfrak{A}$ un valore minore di quello che per l'integrale stesso è fornito da una qualunque altra curva ordinaria del piano (xy) congiungenti i punti P, Q.

Nel seguito chiameremo tale estremale il *segmento estremale* che unisce i punti P, Q; diremo poi che un'area A del piano (x, y) è limitata da un *contorno di Whittaker* relativo all'integrale $\mathfrak{A}$, quando accada che il segmento estremale che unisce due punti molto vicini del contorno di A appartenga sempre interamente ad A.

Colle denominazioni introdotte, all'enunciato del teorema di Whittaker si può dare, senza diminuirne affatto la generalità, la forma seguente:

Se un'area A del piano (x, y), limitata da un contorno di Whittaker relativo all'integrale

$$\mathfrak{A} = \int \{h - V(x, y)\}^{\frac{1}{2}} \{(dx)^2 + (dy)^2\}^{\frac{1}{2}},$$

è multiplamente connessa (e quindi contiene circuiti non riducibili per deformazione continua ad un punto), esiste sempre tra questi circuiti un'orbita periodica del sistema dinamico considerato per la quale il valore della costante dell'energia è h, cioè un'estremale chiusa di $\mathfrak{A}$.

Prima di passare alla dimostrazione di questo teorema, osserveremo che la condizione che l'area A sia circondata da un contorno di Whittaker porta di conseguenza che il segmento estremale determinato da due punti molto prossimi appartenenti ad A appartiene interamente ad A anche se i due punti in questione non giacciono ambedue sul contorno di A. Infatti — potendosi dimostrare che una parte qualunque di un segmento estremale è ancora un segmento estremale — l'ipotesi contraria costringerebbe ad ammettere che è possibile trovare sul contorno di A due punti vicinissimi, congiungibili mediante un segmento estremale non appartenente interamente ad A.

Immaginiamo l'area A decomposta, mediante un doppio sistema R di archi di curve aventi i loro estremi sul contorno di A e appartenenti interamente ad A, in un numero finito N di areole (semplicemente connesse) $a_1, a_2, \ldots a_N$ così piccole che, scelto arbitrariamente un punto P sul contorno di una di esse a, esso possa esser congiunto mediante un segmento estremale ad un punto qualunque Q del contorno di a o di un'areola adiacente (cioè tale che il suo contorno abbia almeno un punto in comune col contorno di a).

Chiameremo *spezzata estremale chiusa di p lati* ogni curva ordinaria chiusa (appartenente interamente ad A) che si possa immaginare ottenuta:

1° scegliendo sopra R una successione di p punti — che diremo *vertici* della spezzata estremale — tali che due qualunque successivi (e l'ultimo e il primo) appartengano al contorno di una stessa areola a;

2°) congiungendo ognuno di tali punti col successivo (e l'ultimo col primo) mediante il segmento estremale determinato dai punti stessi — che diremo *lato* della spezzata estremale —.

Potrà darsi il caso che più lati successivi di una spezzata estremale chiusa si raccordino nei vertici comuni e costituiscano un unico segmento estremale avente i suoi estremi sopra R ma non sul contorno di una stessa areola a: viceversa una curva chiusa costituita dall' insieme di più segmenti estremali aventi tutti i loro estremi sopra R, sarà sempre una spezzata estremale chiusa.

Indicheremo con n il massimo numero di lati che può fornire ad una spezzata estremale chiusa un segmento estremale avente i suoi estremi sopra R: numero che sarà certamente finito, un segmento estremale non potendo avere in comune con R altro che un numero finito di punti. Per la nostra dimostrazione è essenziale prendere in esame la varietà di curve Σ costituita dalle spezzate estremali chiuse che:

1° avvolgono uno almeno dei contorni interni di A;

2° non hanno più di $N + n - 2$ lati.

Tale varietà dipende da un numero *finito* di parametri, quindi l'insieme dei valori assunti da $\mathfrak{A}$ sulle spezzate appartenenti a Σ ammetterà un minimo assoluto a cui corrisponderanno una o più spezzate della varietà stessa che diremo minimizzanti.

Evidentemente il nostro teorema resterà dimostrato se faremo vedere che ciascuna delle spezzate minimizzanti non ha punti angolosi: perchè ciò porta di conseguenza che ciascuna di tali spezzate è un'estremale chiusa dell' integrale $\mathfrak{A}$.

Cominciamo dal dimostrare che una spezzata minimizzante S_m non può avere più di N lati.

Se S_m ha più di N lati, due almeno di essi dovranno avere ambedue gli estremi sul contorno di una stessa areola a. Siano allora P, Q due vertici di S_m appartenenti ai due lati in questione, ma non consecutivi sulla S_m. I due punti P, Q giacendo sul contorno di una stessa areola a, esisterà un segmento estremale avente per estremi i punti stessi: segmento estremale che non farà parte della S_m — perchè i suoi estremi appartengono al contorno di una stessa areola a e non sono vertici consecutivi di S_m — e costituirà insieme a ciascuna delle due successioni di segmenti estremali in cui la S_m resta decomposta dai punti P , Q , due spezzate estremali chiuse $S_m^{(1)}$, $S_m^{(2)}$. Per la proprietà di minimo dei segmenti estremali, è evidente che su ciascuna di queste due spezzate il valore di $\mathfrak{A}$ è minore che sulla S_m. D'altra parte, appartenendo S_m alla varietà Σ, uno almeno dei contorni interni di A dovrà essere incluso in S_m, e quindi anche in $S_m^{(1)}$ o $S_m^{(2)}$, essendo queste due curve totalmente interne ad A. Vediamo dunque che l'ipotesi che S_m abbia più di N lati porta di conseguenza che esiste un elemento di Σ pel quale il valore di $\mathfrak{A}$ è minore che su S_m, e questo è assurdo.

Dimostrato che S_m non può avere più di N lati, potremo far vedere facilmente che S_m non ha punti angolosi.

Supposto infatti che S_m abbia un punto angoloso, sopprimiamo in S_m i due lati ad esso adiacenti, e congiungiamo gli estremi P , Q della curva aperta così ottenuta (cioè punti appartenenti al contorno di una stesso areola a o di due areole a adiacenti) mediante il segmento estremale da essi individuato. Per provare il nostro asserto; basterà dimostrare che la curva chiusa S_m^* cui così perveniamo è una spezzata estremale chiusa della varietà Σ, perchè per la proprietà di minimo dei segmenti estremali possiamo esser sicuri che il valore dell' integrale $\mathfrak{A}$ sopra S_m^* è minore che sopra S_m.

Intanto S_m^* è certamente una spezzata estremale chiusa, essendo costituita dall'insieme di più segmenti estremali aventi i loro estremi sopra R. Inoltre il numero dei suoi lati non può superare $N + n - 2$, perchè il segmento estremale avente i suoi estremi in P e Q può fornire alla S_m^* al più n lati, e d'altra parte il numero dei lati di S_m, per quanto abbiamo precedentemente dimostrato, non può superare N. Infine è facile vedere che in S_m^* è incluso uno almeno dei contorni interni di A: basta per questo aver presente che uno almeno di tali contorni è incluso in S_m.

La S_m^* è dunque una spezzata estremale chiusa della varietà Σ, e ciò è sufficiente, come abbiamo già detto, per dimostrare il nostro asserto.

Osserveremo infine che ogni spezzata minimizzante rende minimo $\mathfrak{A}$ non solo in Σ ma anche nella varietà (Σ) costituita da tutte quante le curve ordinarie chiuse interne ad A, che avvolgono uno almeno dei contorni di A. Infatti se C è una tale curva, esisterà sempre una spezzata S di Σ avente i suoi vertici sopra C. Il valore di $\mathfrak{A}$ sopra C sarà certamente superiore al valore di $\mathfrak{A}$ sopra S, e questo prova quanto volevamo.

L'esistenza di un minimo assoluto per l'insieme dei valori assunti da $\mathfrak{A}$ sulla varietà (Σ), è appunto ciò che è ammesso *a priori* nel ragionamento addotto dal Whittaker per giustificare il suo criterio per la ricerca di orbite periodiche.