ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 17 marzo 1912.

F. D'Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulle superficie minime cerchiate di Riemann.* Nota del Socio L. Bianchi.

1. Nella Memoria di Riemann: *Ueber die Flächen vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung* (1) viene trattato, al n. 19, il problema (di Plateau) di far passare una superficie d'area minima per un contorno formato da due circoli in piani paralleli, ed il problema si risolve ammettendo che tutte le sezioni fatte con piani paralleli a quei due estremi siano altrettanti circoli. Le superficie minime così trovate dipendono da due costanti arbitrarie e le loro equazioni si hanno in termini finiti per funzioni ellittiche (vedi più oltre n. 3).

Indipendentemente da Riemann, Enneper (2) ricercò tutte le superficie minime cerchiate e dimostrò che i piani dei circoli sono necessariamente paralleli, onde si è ricondotti unicamente al caso di Riemann.

Queste superficie minime cerchiate corrispondono, come Schwarz osservò (3), ad assumere nelle formole di Weierstrass per la funzione $F(s)$ l'espressione

$$F(s) = \frac{C}{s\sqrt{(s-\cot\varepsilon)\,s\,(s+\operatorname{tg}\varepsilon)}},$$

essendo C, ε costanti reali.

(1) Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft zu Göttingen, t. 13 (1867); vedi Riemann's Werke, pp. 329-333 (2a edizione).

(2) Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. XIV (1869).

(3) *Miscellen aus dem Gebiete der Minimalflächen* (H), Schwarz's Werke, Bd. I.

Sulle superficie minime cerchiate citiamo ancora una Memoria di X. Stouff (¹), ed infine un'interessante Nota di G. Juka (²), dove le equazioni di queste superficie minime sono poste sotto una semplice forma che ci sarà utile fra breve.

2. Scopo della presente Nota è di far conoscere una nuova interpretazione geometrica che possono ricevere le superficie minime cerchiate di Riemann in *metrica non-euclidea* (iperbolica). Tale interpretazione si fonda sulla nota circostanza che in queste superficie il luogo dei centri dei circoli è una linea piana, il cui piano π è normale a quelli dei circoli. Si consideri allora questo piano π come piano limite $z=0$ in una metrica iperbolica definita, nella rappresentazione di Poincaré, da

$$ds'^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}. \tag{1}$$

I circoli, ortogonali al piano limite, della superficie minima Σ rappresentano rette non-euclidee e la Σ è quindi, in metrica iperbolica, una superficie rigata. Ora, per le proprietà generali delle superficie minime, i circoli di Σ (linee di livello), insieme alle loro trajettorie ortogonali (linee di pendenza), formano un sistema isotermo, e la proprietà si conserva in metrica iperbolica, la rappresentazione di Poincaré essendo conforme.

Sulla nostra rigata Σ della metrica iperbolica le generatrici formano dunque colle trajettorie ortogonali un sistema isotermo, onde la superficie stessa è il luogo delle binormali di una curva a torsione costante. Dunque: *Ogni superficie minima cerchiata di Riemann, interpretata in metrica iperbolica, diventa la superficie luogo delle binormali di una curva Γ a torsione costante.*

Per definire completamente questa curva Γ, ne osserveremo ancora una altra proprietà che la caratterizza. Se alla superficie minima Σ diamo una traslazione continua normale ai piani dei circoli, ciascun punto della curva Γ si dirige normalmente ai circoli; e poichè la detta traslazione rappresenta anche un movimento continuo parabolico dello spazio a curvatura costante, ne risulta che la direzione dello spostamento, per ciascun punto di Γ, rimane nel piano osculatore non-euclideo di Γ, e la curva Γ resta dunque asintotica della superficie S generata. Siccome poi Γ ha costante la torsione, segue dal teorema di Enneper che la superficie S generata è a curvatura costante negativa. Abbiamo dunque il seguente teorema: *La curva Γ a torsione costante genera in un movimento continuo parabolico una superficie pseudosferica* S *di cui rimane asintotica.*

(¹) *Sur une classe de surfaces minima.* Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, t. VI (1892).

(²) Mathematische Annalen, Bd. 52 (1899).

Possiamo enunciare questo risultato sotto l'altra forma:

Se alla superficie minima cerchiata Σ *si dà una traslazione continua normale ai piani dei circoli, le* ∞^1 *posizioni di* Σ, *interpretate in metrica iperbolica, sono le superficie luogo delle normali ad una superficie pseudosferica lungo le asintotiche di un sistema.*

Di una proprietà analoga godono naturalmente le asintotiche del secondo sistema, sicchè la doppia infinità di circoli si ordina in due modi diversi in ∞^1 superficie minime cerchiate congruenti per traslazione.

3. Alle considerazioni geometriche precedenti facciamo ora seguire i calcoli che, mentre dànno la conferma analitica delle proprietà osservate, fanno conoscere di più, in termini finiti, le equazioni di questa singolare curva Γ a torsione costante dello spazio iperbolico e delle superficie pseudosferiche da essa generate.

Per la superficie minima cerchiata Σ assumiamo il piano della curva C_0, luogo dei centri dei circoli, per piano xy, mentre disponiamo il piano xz parallelamente ai piani di circoli. Secondo le formole stabilite da Juka (loc. cit.), le coordinate x_0, y_0 del centro mobile del circolo sono date, per un parametro u, mediante funzioni ellittiche di Jacobi a modulo arbitrario k, dalle espressioni

$$x_0 = \mu k' u + \frac{\mu}{k'}\left\{\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - E(u)\right\} \quad , \quad y_0 = \mu k u \, ,$$

dove k' è il modulo complementare, μ una seconda costante arbitraria, ed $E(u)$ l'integrale di 2^a specie

$$E(u) = \int_0^u \operatorname{dn}^2 u \, du \, ;$$

infine il raggio R del circolo è dato da

$$R = \frac{\mu}{\operatorname{cn} u} \, .$$

Come si vede, la costante μ moltiplicativa influisce solo sulle dimensioni della superficie e rappresenta il raggio del circolo minimo; senza alterare la generalità potremo fare $\mu = 1$. Così la superficie minima cerchiata Σ sarà definita dalle formole:

$$(2) \qquad x = k' u + \frac{1}{k'}\left\{\frac{\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn} u} - E(u)\right\} + \frac{\cos \omega}{\operatorname{cn} u} \, , \; y = k u \, , \; z = \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{cn} u} \, ,$$

che dànno le coordinate x, y, z di un suo punto, espresse per due parametri u, ω

Se calcoliamo il $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ della Σ in coordinate u, ω, troviamo

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,d\omega + \mathrm{G}\,d\omega^2,$$

con

$$\mathrm{E} = k^2 + \frac{k'^2 + \mathrm{sn}^2 u\,\mathrm{dn}^2 u}{\mathrm{cn}^4 u} + 2k'\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^4 u}\cos\omega\,,\ \mathrm{F} = -\frac{k'\,\mathrm{sen}\,\omega}{\mathrm{cn}^3 u}\,,\ \mathrm{G} = \frac{1}{\mathrm{cn}^2 u}\,.$$

L'equazione differenziale

$$\mathrm{F}\,du + \mathrm{G}\,d\omega = 0$$

delle trajettorie ortogonali dei circoli si scrive

$$\frac{d\omega}{\mathrm{sen}\,\omega} - \frac{k'du}{\mathrm{cn}\,u} = 0\,,$$

sicchè ponendo

$$v = \int\frac{d\omega}{\mathrm{sen}\,\omega} - \int\frac{k'du}{\mathrm{cn}\,u}\,,$$

cioè

$$v = \log\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} - \log\frac{\mathrm{dn}\,u + k'\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\,, \tag{3}$$

saranno appunto le $v = \mathrm{cost}$ le trajettorie ortogonali dei circoli. Calcolando ora il ds^2 in coordinate u, v, troviamo

$$ds^2 = \left\{\left(\frac{k'\cos\omega + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2 u}\right)^2 + k^2\right\}du^2 + \frac{\mathrm{sen}^2\omega}{\mathrm{cn}^2 u}\,dv^2\,, \tag{4}$$

dove resta ancora da esprimere $\mathrm{sen}\,\omega$, $\cos\omega$ per u, v. Per ciò traggasi dalla (3)

$$\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{2} = \frac{\mathrm{dn}\,u + k'\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}\,e^v$$

e, tenendo conto della identità

$$\mathrm{cn}^2 u = (\mathrm{dn}\,u + k'\,\mathrm{sn}\,u)(\mathrm{dn}\,u - k'\,\mathrm{sn}\,u),$$

ne dedurremo

$$\left\{\begin{aligned} \cos\omega &= -\frac{\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{senh}\,v + k'\,\mathrm{sn}\,u\cosh v}{\mathrm{dn}\,u\cosh v + k'\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{senh}\,v}\,,\\ \mathrm{sen}\,\omega &= \frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u\cosh v + k'\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{senh}\,v}\,. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Abbiamo quindi

$$\frac{k'\cos\omega + \mathrm{sn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}^2 u} = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\cosh v - k'\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{senh}\,v}{\mathrm{dn}\,u\cosh v + k'\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{senh}\,v}\,,$$

e perciò

$$\left(\frac{k'\cos\omega + \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{cn}^2 u}\right)^2 + k^2 = \frac{k^2\cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v}{(\operatorname{dn} u \cosh v + k' \operatorname{sn} u \operatorname{senh} v)^2}.$$

Sostituendo nella (4), abbiamo la formola definitiva pel ds^2:

$$(6)\qquad ds^2 = \frac{1}{(\operatorname{dn} u \cosh v + k' \operatorname{sn} u \operatorname{senh} v)^2}\{(k^2\cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v)\,du^2 + dv^2\},$$

la quale conferma che i circoli $u = \mathrm{cost}$, colle trajettorie ortogonali $v = \mathrm{cost}$, formano un sistema isotermo. Poichè inoltre u, e quindi $y = \frac{u}{k}$, è parametro d'isotermia resta confermato, per un noto teorema di Beltrami, che la superficie Σ è ad area minima.

4. Interpretiamo ora la superficie minima Σ come esistente nello spazio iperbolico di curvatura $K = -1$ e d'elemento lineare (1). Indicandone con ds' l'elemento lineare non-euclideo, avremo

$$ds'^2 = \frac{\operatorname{sen}^2\omega}{\operatorname{cn}^2 u}\cdot ds^2,$$

cioè per la (5_2)

$$ds'^2 = (\operatorname{dn} u \cosh v + k' \operatorname{sn} u \operatorname{senh} v)^2\, ds^2.$$

Osservando la (6), abbiamo dunque

$$(7)\qquad ds'^2 = (k^2\cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v)\,du^2 + dv^2.$$

La curvatura geodetica delle $v = \mathrm{cost}$ è qui

$$\frac{1}{\varrho_v} = \frac{\operatorname{senh} v \cosh v}{k^2\cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v},$$

e per ciò la linea $v = 0$, che indichiamo con Γ, è geodetica, sicchè l'attuale rigata Σ è il luogo delle binormali di Γ. Se, colle formole di Frenet in metrica iperbolica [1], si calcola l'elemento lineare della rigata delle binormali ad una curva e si identifica con (7), si trova che: *La torsione* $\frac{1}{T}$ *della nostra curva* Γ *è costante, precisamente*

$$\frac{1}{T} = \frac{k'}{k}.$$

La prima proprietà dedotta geometricamente al n. 2 è così confermata dal calcolo. Di più possiamo ora scrivere le equazioni in termini finiti della

[1] Vedi le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. I, §§ 201-202.

curva $\boldsymbol{\Gamma}$ a torsione costante $\frac{1}{T}=\frac{k'}{k}$ ponendo nelle (2) $v=0$, cioè secondo le (5)

$$\cos\omega=-\frac{k'\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}\quad,\quad \operatorname{sen}\omega=\frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\,.$$

Così: *la curva $\boldsymbol{\Gamma}$ è data, in termini finiti, dalle equazioni*

$$x=k'u+\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{k'\operatorname{dn}u}-\frac{1}{k'}\operatorname{E}(u)\quad,\quad y=ku\quad,\quad z=\frac{1}{\operatorname{dn}u}\tag{8}$$

Si noti inoltre che, per la (7), il suo arco s non-euclideo è

$$s=ku.$$

Possiamo anche facilmente calcolare la prima curvatura (flessione non euclidea) $\frac{1}{\varrho}$ della nostra curva $\boldsymbol{\Gamma}$ in funzione dell'arco s con la formola

$$\frac{1}{\varrho^2}=\operatorname{dn}^2u\left\{\left(\frac{d^2x}{ds^2}-2\operatorname{dn}u\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}-2\operatorname{dn}u\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds}\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{d^2z}{ds^2}+\operatorname{dn}u\left[\left(\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(\frac{dz}{ds}\right)^2\right]\right)^2\right\},$$

che deriva dalla formola generale (31) a pag. 364 del 1° volume delle mie *Lezioni di geometria differenziale*. Qui troviamo

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{dx}{ds}=-kk'\dfrac{\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{dn}^2u}\quad,\quad\dfrac{dy}{ds}=1\quad,\quad\dfrac{dz}{ds}=\dfrac{k\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}^2u}\\[2ex]\dfrac{d^2x}{ds^2}=-2k'\dfrac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}^3u}\quad,\quad\dfrac{d^2y}{ds^2}=0\quad,\quad\dfrac{d^2z}{ds^2}=\dfrac{\operatorname{cn}^2u-k'^2\operatorname{sn}^2u}{\operatorname{dn}^3u}\,;\end{array}\right.$$

e sostituendo nel valore di $\frac{1}{\varrho^2}$, e riducendo, risulta la semplice formola

$$\frac{1}{\varrho}=2\operatorname{cn}u\,.$$

Vediamo adunque che: *La curva $\boldsymbol{\Gamma}$ a torsione costante nello spazio iperbolico, data in termini finiti dalle* (8), *è definita dalle equazioni intrinseche*

$$\frac{1}{T}=\frac{k'}{k}\quad,\quad\frac{1}{\varrho}=2\operatorname{cn}\left(\frac{s}{k}\right).\tag{9}$$

Siccome la superficie $\boldsymbol{\Sigma}$ ha linee di curvatura isoterme, e tale proprietà si mantiene in metrica non-euclidea, abbiamo: *La superficie delle binor-*

mali della curva Γ (in metrica iperbolica) è una superficie isoterma. Questa è una proprietà caratteristica della nostra curva Γ, come dimostreremo più oltre (vedi n. 7).

5. Conformemente alle osservazioni geometriche del n. 2, diamo ora alla curva Γ una traslazione d'ampiezza variabile w parallelamente all'asse delle y (normalmente ai piani dei circoli). La superficie S generata in questa traslazione, ove si ponga $ku + w = t$, sarà data dalle formole

$$(10) \qquad x = k'u + \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{k' \operatorname{dn} u} - \frac{1}{k'} \mathrm{E}(u) \quad , \quad y = t \quad , \quad z = \frac{1}{\operatorname{dn} u}.$$

Riguardando questa superficie S (cilindro dello spazio euclideo) come appartenente allo spazio iperbolico (1), avremo per il suo elemento lineare

$$(11) \qquad ds'^2 = k^4 \operatorname{sn}^2 u \, du^2 + \operatorname{dn}^2 u \, dt^2.$$

La sua curvatura *assoluta* K si calcola subito ed è

$$\mathrm{K} = -\frac{1}{k^2},$$

indi per la curvatura K_0 *relativa* avremo

$$\mathrm{K}_0 = \mathrm{K} + 1 = \frac{k'^2}{k^2}.$$

Se calcoliamo altresì i coefficienti

$$\mathrm{D} = \Omega_{11} \quad , \quad \mathrm{D}' = \Omega_{12} \quad , \quad \mathrm{D}'' = \Omega_{22}$$

della seconda forma fondamentale di S, ricorrendo alle formole del § 170, vol. I, delle *Lezioni*, abbiamo

$$(12) \qquad \mathrm{D} = k^2 k' \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \quad , \quad \mathrm{D}' = 0 \quad , \quad \mathrm{D}'' = -k' \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

e quindi per l'equazione differenziale delle asintotiche

$$dt^2 - k^2 du^2 = 0.$$

Le asintotiche di un sistema sono le $t - ku = \text{cost}$, in particolare è asintotica la $v = 0$, e quelle dell'altro sistema sono le $t + ku = \text{cost}$, manifestamente simmetriche delle prime rispetto al piano xz. Per il teorema di Enneper [1] la torsione delle asintotiche, in particolare della curva Γ, è data da

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = \sqrt{-\mathrm{H}_0} = \frac{k'}{k},$$

il che dimostra nuovamente la prima delle (9).

[1] *Lezioni*, vol. I, pag. 496.

Per ritrovare di nuovo anche la seconda

$$\frac{1}{\varrho} = 2 \operatorname{cn} u ,$$

basta calcolare, colla formola di Bonnet [1], la curvatura geodetica della $t - ku = 0$, che combina appunto coll'assoluta $\frac{1}{\varrho}$.

6. È stato osservato da Schwarz (*Miscellen*, loc. cit.) che la superficie Σ', coniugata in applicabilità di una superficie minima cerchiata Σ, è un'altra tale superficie minima. Non è senza interesse ricercare la dipendenza fra le formole che dànno le due superficie Σ, Σ' ovvero le due corrispondenti curve a torsione costante Γ, Γ' dello spazio iperbolico. Dimostreremo che il passaggio da Σ a Σ', o da Γ a Γ', si ottiene cangiando il modulo k nel complementare k'.

Prendasi la superficie minima cerchiata Σ, nella quale però converrà ora meglio dare, per ragioni di simmetria, al raggio del parallelo minimo il valore k' anzichè il valore 1. Così, per la formola (6), il ds^2 della Σ sarà dato da

$$(13)\quad ds^2 = \frac{k'^2}{(\operatorname{dn} u \cosh v + k' \operatorname{sn} u \operatorname{senh} v)^2} \{(k^2 \cosh^2 v + k'^2 \operatorname{senh}^2 v)\, du^2 + dv^2\} .$$

Considerando la superficie minima cerchiata analoga Σ', ottenuta collo scambio di k con k', avremo per il suo elemento lineare

$$(13')\quad ds'^2 = \frac{k^2}{(\Delta\mathrm{n} \mathrm{U} \cosh \mathrm{V} + k \operatorname{Sn} \mathrm{U} \operatorname{senh} \mathrm{V})^2} \{(k'^2 \cosh^2 \mathrm{V} + k^2 \operatorname{senh}^2 \mathrm{V})\, d\mathrm{U}^2 + d\mathrm{V}^2\} ,$$

ove

$$\operatorname{Sn} \mathrm{U} \quad , \quad \operatorname{Cn} \mathrm{U} \quad , \quad \Delta\mathrm{n} \mathrm{U}$$

indicano le funzioni ellittiche col modulo complementare k'. Dimostriamo che le due superficie minime Σ, Σ' sono applicabili in guisa che le linee di livello $u = \text{cost}$ (circoli) dell'una diventano sull'altra le linee di pendenza $\mathrm{V} = \text{cost}$ (traiettorie ortogonali dei circoli) e reciprocamente. Per questo diamo le effettive formole di corrispondenza che sono

$$(14)\quad \begin{cases} \operatorname{tgh} \mathrm{V} = \dfrac{k' \operatorname{sn} u}{\operatorname{dn} u} \quad , \quad \dfrac{1}{\cosh \mathrm{V}} = \dfrac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u} \\[2ex] \operatorname{tgh} v = \dfrac{k \operatorname{Sn} \mathrm{U}}{\Delta\mathrm{n} \mathrm{U}} \quad , \quad \dfrac{1}{\cosh v} = \dfrac{\operatorname{Cn} \mathrm{U}}{\Delta\mathrm{n} \mathrm{U}} . \end{cases}$$

[1] *Lezioni*, vol. I, pag. 183.

Da queste si deduce in effetto

$$\frac{dV}{du} = \frac{k'}{\operatorname{cn} u} \quad , \quad \frac{dv}{dU} = \frac{k}{\operatorname{Cn} U} ,$$

e si verifica subito che i due elementi lineari (13), (13′) si trasformano così l'uno nell'altro [1].

Le proprietà così verificate per le due superficie minime Σ, Σ' le caratterizzano appunto come coniugate in applicabilità. Notevole è il caso particolare $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dove le due superficie minime Σ, Σ' riescono identiche di forma.

7. Da ultimo veniamo a dimostrare, conformemente a quanto è asserito alla fine del n. 4, che: *La curva Γ dello spazio iperbolico definita dalle equazioni intrinseche* (9) *è l'unica curva* **a** *torsione costante di questo spazio, la cui superficie delle binormali è isoterma* (*con linee di curvatura isoterme*). Così verremo a dimostrare nuovamente questa proprietà della curva Γ ed in pari tempo proveremo che essa è caratteristica per la nostra curva.

Nello spazio iperbolico, di curvatura $K = -1$, consideriamo una curva C a torsione costante

$$\frac{1}{T} = a \qquad (a \text{ costante})$$

e la superficie Σ luogo delle sue binormali.

Sulla Σ assumiamo a parametro v l'arco di C ed a parametro u il tratto di generatrice contato a partire da $C(u = 0)$. L'elemento lineare di Σ sarà dato (vedi *Lezioni*, vol. I, pag. 450) da

$$ds^2 = du^2 + (\cosh^2 u + a^2 \operatorname{senh}^2 u)\, dv^2, \tag{15}$$

sicchè pei coefficienti E, F, G abbiamo qui

$$E = 1 \quad , \quad F = 0 \quad , \quad G = \cosh^2 u + a^2 \operatorname{senh}^2 u$$

e quindi i valori dei simboli di Christoffel sono tutti nulli, salvo i due seguenti

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{(1 + a^2) \operatorname{senh} u \cosh u}{\cosh^2 u + a^2 \operatorname{senh}^2 u}$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -(1 + a^2) \operatorname{senh} u \cosh u .$$

[1] Si osservi ancora dalle (14) che il circolo minimo $u = 0$ della Σ si muta sulla Σ' nella curva Γ' a torsione costante non-euclidea.

Consideriamo ancora i coefficienti D, D′, D″ della seconda forma fondamentale di Σ che saranno [1]

$$D=0\ ,\ D'=\frac{a}{\sqrt{\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u}}\ ,\ D''=2V\sqrt{\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u}\ , \tag{16}$$

dove

$$\frac{1}{\varrho}=2V$$

è una funzione della sola v che rappresenta appunto la prima curvatura, o flessione, di C. Si tratta ora di determinare questa funzione V per modo che la superficie Σ risulti isoterma.

Applicando i risultati esposti nel vol. II delle mie *Lezioni* a pag. 30 [2], si vede essere per ciò necessario e sufficiente che, posto

$$\Gamma=(ED'-FD)\,.\,\mu\ ,\ \Gamma'=\tfrac{1}{2}(ED''-GD)\,.\,\mu\ ,\ \Gamma''=(FD''-GD')\,.\,\mu\,.$$

si possa determinare il moltiplicatore μ in guisa che Γ, Γ', Γ'' soddisfino le equazioni di Codazzi

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\Gamma}{\partial v}-\frac{\partial\Gamma'}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Gamma'=0\\&\frac{\partial\Gamma'}{\partial v}-\frac{\partial\Gamma''}{\partial u}-\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\Gamma+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\Gamma''=0.\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Sostituendo in queste i valori (17) di Γ, Γ', Γ'', coll'osservare le (16), e introducendo come nuova funzione incognita in luogo di μ l'altra

$$M=\log\mu-\tfrac{1}{2}\log(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u),$$

le (18) determinano i valori di $\dfrac{\partial M}{\partial u}$, $\dfrac{\partial M}{\partial v}$ secondo le formole seguenti, ove si è posto per brevità

$$V'=\frac{dV}{dv}\,;$$

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial u}&=-\frac{2(1+a^2)\operatorname{senh}u\cosh u}{\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u}-\frac{(1+a^2)\operatorname{senh}u\cosh u\,V^2}{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)V^2}-\\&\qquad-\frac{aV'}{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)V^2}\\\frac{\partial M}{\partial v}&=\frac{a(1+a^2)\operatorname{senh}u\cosh u\,V}{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)V^2}-\frac{(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)VV'}{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)V^2}\,.\end{aligned}\right.$$

[1] Si consideri che le $v=\text{cost}$ sono asintotiche (rette), e si tenga conto delle equazioni di Gauss e di Codazzi.

[2] I teoremi cui ci riferiamo valgono, come facilmente si dimostra, non solo in metrica euclidea ma anche in una metrica generale a curvatura costante.

Basta ora scrivere la condizione d'integrabilità per queste due e si ottiene

$$a(1+a^2)\mathrm{V}\,\{a^2(\cosh^2 u+\operatorname{senh}^2 u)+(\cosh^2 u-a^2\operatorname{senh}^2 u)\mathrm{V}^2\}+$$
$$+\,a\mathrm{V}''\,\{a^2+(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)\mathrm{V}^2\}-2a(\cosh^2 u+a^2\operatorname{senh}^2 u)\mathrm{V}\mathrm{V}'=0\,,$$

dove $\mathrm{V}''=\dfrac{d^2\mathrm{V}}{dv^2}$. Siccome V è indipendente da u, questa deve ridursi alla identità

$$\cosh^2 u-\operatorname{senh}^2 u=1.$$

Questo ci dà dapprima le due condizioni per V:

$$\begin{cases} \mathrm{V}''\mathrm{V}^2+(1+a^2)\mathrm{V}(a^2+\mathrm{V}^2)-2\mathrm{V}'^2\mathrm{V}=-a^2\mathrm{V}'' \\ \mathrm{V}''\mathrm{V}^2+(1+a^2)\mathrm{V}(1-\mathrm{V}^2)-2\mathrm{V}'^2\mathrm{V}=\mathrm{V}'', \end{cases}$$

le quali equivalgono però all'unica del 1° ordine

$$\mathrm{V}'=\sqrt{(1-\mathrm{V}^2)(\mathrm{V}^2+a^2)}\,.$$

L'integrale generale di questa, ove si ponga

$$k=\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\quad,\quad k'=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$$

e si includa la costante additiva in v, è dato da

$$\mathrm{V}=\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}\right).$$

Le equazioni intrinseche della curva domandata sono adunque

$$\frac{1}{\mathrm{T}}=a=\frac{k'}{k}\quad,\quad\frac{1}{\varrho}=2\mathrm{V}=2\operatorname{cn}\left(\frac{v}{k}\right)$$

che combinano appunto colle (9), ciò che dimostra il teorema enunciato.

Osserveremo in fine che l'analisi qui adoperata si applica nel medesimo modo per risolvere il problema analogo negli altri spazî a curvatura costante, nulla o positiva; si trovano così i risultati seguenti:

1°. Nell'ordinario spazio euclideo (a curvatura nulla) non esiste alcuna curva reale ed a torsione costante non nulla, la superficie delle cui binormali sia isoterma.

2°. Nello spazio ellittico (a curvatura $\mathrm{K}=+1$) le uniche curve reali di questa specie sono tutte e sole quelle di equazioni intrinseche

$$\frac{1}{\mathrm{T}}=1\quad,\quad\frac{1}{\varrho}=2\operatorname{tg}(cs)\qquad(c\text{ costante}).$$

La superficie delle binormali di queste curve sono particolari rigate a curvatura assoluta nulla.

A questi risultati si collegano altre osservazioni geometriche sulle quali mi propongo di ritornare più tardi.