ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Meccanica. — *Sulla deformazione di un cilindro di rotazione.* Nota del Corrisp. O. TEDONE.

1. Seguendo le notazioni introdotte in una Nota precedente, chiamiamo h la lunghezza del cilindro ed R il raggio della sua base; scegliamo gli assi coordinati in modo che l'origine sia nel centro di una delle basi e l'asse del cilindro cada sulla parte positiva dell'asse z; e introduciamo coordinate cilindriche con le formole:

$$x = l \cos \psi \quad , \quad y = l \operatorname{sen} \psi . \tag{1}$$

Il problema della deformazione di un cilindro circolare (di capitale interesse nelle applicazioni pratiche), anche ridotto al caso in cui il cilindro è costituito di materiale isotropo, è un problema notevolmente complicato. Fa eccezione il caso in cui la deformazione è una torsione indipendente dall'angolo ψ e qualche altro caso il cui studio è appunto oggetto principale di questa Nota. Precisamente noi vogliamo dimostrare che il problema della deformazione di un cilindro circolare si risolve facilmente quando la deformazione è indipendente dall'angolo ψ e sulla superficie sono assegnate la componente normale dello spostamento e la componente tangenziale della tensione. Ed, in questa quistione, possiamo anche astrarre dalla deformazione di torsione. Per se stesso il problema può apparire di scarso interesse, però esso può servire utilmente d'intermediario per risolvere il problema della deformazione quando le condizioni in superficie sieno altre.

2. Partiamo dall'osservazione che, come si prova facilmente, i sistemi di formole seguenti ci dànno due sistemi di soluzioni particolari dell'equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo:

$$\left\{\begin{aligned} u_l &= \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\, kz J_1(kl)\,[(a+d)\operatorname{Sen}(kz)+(b+c)\operatorname{Cos}(kz)] + \\ &\qquad + J_1(kl)\,[a\operatorname{Cos}(kz)+b\operatorname{Sen}(kz)]\,, \\ u_z &= -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\, kz J_0(kl)\,[(a+d)\operatorname{Cos}(kz)+(b+c)\operatorname{Sen}(kz)] + \\ &\qquad + J_0(kl)\,[c\operatorname{Cos}(kz)+d\operatorname{Sen}(kz)]\,, \\ \theta &= \frac{2k\mu}{\lambda+3\mu}\, J_0(kl)\,[(a+d)\operatorname{Cos}(kz)+(b+c)\operatorname{Sen}(kz)]\,; \end{aligned}\right. \tag{2}$$

$$
(3)\quad \begin{cases}
u_l = -\frac{1}{2}\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\, kl\, \mathrm{I}_0(kl)\,[(a_1+d_1)\cos(kz)+(b_1-c_1)\operatorname{sen}(kz)] + \\
\qquad\qquad + \mathrm{I}_1(kl)\,[a_1\cos(kz)+b_1\operatorname{sen}(kz)], \\
u_z = -\frac{1}{2}\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\, kl\, \mathrm{I}_1(kl)\,[-(a_1+d_1)\operatorname{sen}(kz)+(b_1-c_1)\cos(kz)] + \\
\qquad\qquad + \mathrm{I}_0(kl)\,[c_1\cos(kz)+d_1\operatorname{sen}(kz)], \\
\theta = \dfrac{k\mu}{\lambda+2\mu}\,\mathrm{I}_0(kl)\,[(a_1+d_1)\cos(kz)+(b_1-c_1)\operatorname{sen}(kz)],
\end{cases}
$$

dove u_l ed u_z sono le componenti dello spostamento secondo il raggio vettore l e l'asse z, θ è la dilatazione elementare, λ e μ le costanti di Lamé, $k, a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1$ costanti arbitrarie e k potrebbe essere immaginario, ma noi la supporremo reale. Abbiamo posto, inoltre:

$$
(4)\quad \begin{cases}
\mathrm{J}_m(l) = \sum\limits_0^\infty{}_i\, (-1)^i \dfrac{\left(\frac{l}{2}\right)^{m+2i}}{i!\,(m+i)!}, \quad \mathrm{I}_m(l) = \sum\limits_0^\infty{}_i\, \dfrac{\left(\frac{l}{2}\right)^{m+2i}}{i!\,(m+i)!}, \\
\operatorname{Sen} z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{Cos} z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}.
\end{cases}
$$

La superficie del cilindro è composto di tre parti: della superficie laterale e delle due basi. Ora il problema che ci siamo proposti di risolvere si può scomporre in tre parti ciascuna delle quali risolve lo stesso problema quando, su due delle tre parti di cui è composta la superficie, la componente normale dello spostamento e tangenziale della tensione acquistano valori nulli, mentre sull'altra acquistano valori arbitrarii. Passiamo a dare la soluzione di questi tre problemi.

3. Se nelle (2) poniamo $k = \frac{k_i}{\mathrm{R}}$ e supponiamo che sia

$$
(5)\qquad \mathrm{J}_1(k_i) = 0,
$$

u_l e la componente

$$
\mathrm{T}_z = \mu\left(\frac{\partial u_l}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial l}\right)
$$

della tensione secondo l'asse z, ossia tangente alla superficie del cilindro, si annullano per $l = \mathrm{R}$, qualunque sieno le costanti a, b, c, d. Per $z = 0$, invece, si annullerà u_z se, nelle (2), poniamo $c = 0$ e si annullerà la componente della tensione secondo la direzione l, cioè

$$
\mathrm{T}_l = -\mu\left(\frac{\partial u_l}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial l}\right)
$$

se $b = 0$. Abbiamo così le infinite soluzioni elementari seguenti dell'equazioni dell'equilibrio elastico per un corpo isotropo, ciascuna caratterizzata dalla soluzione k_i della equazione (5) e contenente ancora due costanti arbitrarie:

$$(6)\quad \begin{cases} u_l^{(i)} = \dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\dfrac{k_i}{R} z\, J_1\left(k_i \dfrac{l}{R}\right)(a_i + d_i)\,\mathrm{Sen}\left(k_i \dfrac{z}{R}\right) + \\ \qquad\qquad + a_i\, J_1\left(k_i \dfrac{l}{R}\right)\mathrm{Cos}\left(k_i \dfrac{z}{R}\right), \\ u_z^{(i)} = -\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\dfrac{k_i}{R} z\, J_0\left(k_i \dfrac{l}{R}\right)(a_i + d_i)\,\mathrm{Cos}\left(k_i \dfrac{z}{R}\right) + \\ \qquad\qquad + d_i\, J_0\left(k_i \dfrac{l}{R}\right)\mathrm{Sen}\left(k_i \dfrac{z}{R}\right). \end{cases}$$

Delle infinite costanti a_i e d_i ci possiamo servire in modo che nella soluzione

$$u_l = \Sigma_i\, u_l^{(i)} \quad , \quad u_z = \Sigma_i\, u_z^{(i)}$$

u_z e $T_l = \mu\left(\dfrac{\partial u_l}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial l}\right)$, per $z = h$, diventino funzioni arbitrarie. Se poniamo i valori di u_z e di T_z per $z = h$ sotto la forma

$$(7)\qquad (u_z)_{z=h} = \Sigma_i\, A_i\, J_0\left(k_i \frac{l}{R}\right) \quad , \quad (T_l)_{z=h} = \Sigma_i\, B_i\, J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right)$$

avremo, per determinare le costanti a_i e d_i, le equazioni:

$$(8)\quad \begin{cases} -(a_i + d_i)\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} k_i \dfrac{h}{R}\,\mathrm{Cos}\left(k_i \dfrac{h}{R}\right) + d_i\,\mathrm{Sen}\left(k_i \dfrac{h}{R}\right) = A_i, \\ (a_i + d_i)\dfrac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\left[2k_i \dfrac{h}{R}\,\mathrm{Cos}\left(k_i \dfrac{h}{R}\right) + \mathrm{Sen}\left(k_i \dfrac{h}{R}\right)\right] + \\ \qquad\qquad + (a_i - d_i)\,\mathrm{Sen}\left(k_i \dfrac{h}{R}\right) = \dfrac{R}{\mu k_i} B_i. \end{cases}$$

Soltanto c'è da osservare che le (7) richiedono che sia:

$$\int_0^R l\,(u_z)_{z=h}\, dl = 0 \quad , \quad (T_l)_{z=h,\, l=0} = 0.$$

In quanto alla seconda condizione essa deve essere supposta soddisfatta dai dati; soddisferemo, invece, anche alla prima sostituendo per u_z un'espressione della forma

$$u_z = A_0\, z + \Sigma_i\, u_z^{(i)},$$

dove A_0 è allora una costante convenientemente determinata.

Cambiando, nella soluzione trovata, z in $h-z$ si trova l'altra soluzione per cui lo spostamento normale e la componente tangenziale della tensione si annullano sulla superficie cilindrica e sulla base $z=h$, mentre sull'altra base acquistano valori arbitrarii.

4. Dalle (3) ricaviamo, in modo analogo, la soluzione del problema nel caso in cui lo spostamento normale e la tensione tangenziale si annullano sulle due basi, mentre acquistano valori arbitrarii sulla superficie cilindrica. Se, infatti, nelle (3) poniamo $b_1=c_1=0$, $k=\frac{m\pi}{h}$, dove m è un intero arbitrario, troviamo infinite soluzioni elementari per cui sulle due basi si annullano u_z e T_l. Esse hanno la forma:

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_l^{(m)} &= \left[-\tfrac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m+d_m)\frac{m\pi l}{h}\mathrm{I}_0\left(\frac{m\pi l}{h}\right)+\right.\\
&\qquad\qquad \left.+a_m\mathrm{I}_1\left(\frac{m\pi l}{h}\right)\right]\cos\frac{m\pi z}{h},\\
u_z^{(m)} &= \left[\tfrac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m+d_m)\frac{m\pi l}{h}\mathrm{I}_1\left(\frac{m\pi l}{h}\right)+\right.\\
&\qquad\qquad \left.+d_m\mathrm{I}_0\left(\frac{m\pi l}{h}\right)\right]\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{h}.
\end{aligned}
\right.
$$

Componendo con queste soluzioni elementari l'altra più generale:

$$u_l=\Sigma_m u_l^{(m)}\quad,\quad u_z=\Sigma_m u_z^{(m)}$$

si può poi in essa disporre delle costanti che restano ancora arbitrarie in modo che sulla superficie laterale del cilindro u_l e T_z acquistino dati valori. Se fra 0 e h i valori di u_l e di T_z si sono posti sotto la forma:

$$u_l=\Sigma_m \mathrm{C}_m\cos\frac{m\pi z}{h}\quad,\quad \mathrm{T}_z=\mu\Sigma\,\mathrm{D}_m\operatorname{sen}\frac{m\pi z}{h}$$

dev'essere:

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m+d_m)\frac{m\pi\mathrm{R}}{h}\mathrm{I}_0\left(\frac{m\pi\mathrm{R}}{h}\right)+a_m\mathrm{I}_1\left(\frac{m\pi\mathrm{R}}{h}\right)=\mathrm{C}_m,\\
&\tfrac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m+d_m)\left\{\frac{m\pi\mathrm{R}}{h}\left[\mathrm{I}_0\left(\frac{m\pi\mathrm{R}}{h}\right)+\mathrm{I}_1'\left(\frac{m\pi\mathrm{R}}{h}\right)\right]+\right.\\
&\qquad\left.+\mathrm{I}_1\left(\frac{m\pi\mathrm{R}}{h}\right)\right\}-(a_m-d_m)\mathrm{I}_1\left(\frac{m\pi\mathrm{R}}{h}\right)=\frac{h}{m\pi}\mathrm{D}_m.
\end{aligned}
\right.
$$

Sommando le tre soluzioni così trovate si trova la deformazione più generale di rotazione per un cilindro di rotazione, tenendo conto che, in questo caso, si sa determinare anche la torsione.

Per convincersi che la nostra soluzione è la più generale basta osservare che essa contiene sei funzioni arbitrarie e cioè i valori dello spostamento normale e della tensione tangenziale sulle due basi e sulla superficie cilindrica. Di queste funzioni arbitrarie, ossia delle costanti arbitrarie che compaiono nelle nostre formole finali, ce ne possiamo servire per soddisfare sulla superficie del cilindro a condizioni diverse da quelle indicate.

5. Cerchiamo di servirci della soluzione ottenuta per risolvere il problema della deformazione del cilindro nel caso in cui sulla base $z = 0$ si annulla lo spostamento, sulla superficie laterale si annulli la tensione, mentre sulla base $z = h$ sono applicate date tensioni dirette secondo l'asse z. Indichiamo perciò le costanti che compaiono nella soluzione che si deduce dalla (6) mutando z in $h - z$ con gli stessi simboli con cui sono indicate nelle (6) stesse munite di un accento. Dobbiamo allora soddisfare alle condizioni seguenti:

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
& -\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a'_i + d'_i)\, k_i \frac{h}{R} \operatorname{Cos}\left(k_i \frac{h}{R}\right) + d'_i \operatorname{Sen}\left(k_i \frac{h}{R}\right) = 0 \ , \ A'_0 = 0 \\
& \tfrac{1}{2}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}(a_m + d_m)\left\{\frac{m\pi R}{h}\left[I_0\left(\frac{m\pi R}{h}\right) + I'_1\left(\frac{m\pi R}{h}\right)\right] + I_1\left(\frac{m\pi R}{h}\right)\right\} - \\
& \qquad\qquad - (a_m - d_m)\, I_1\left(\frac{m\pi R}{h}\right) = 0, \\
& \Sigma_i J_1\left(k_i \frac{l}{R}\right)\left\{a_i + \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}\frac{h}{R} k_i (a'_i + d'_i) \operatorname{Sen}\left(k_i \frac{h}{R}\right) + a'_i \operatorname{Cos}\left(k_i \frac{h}{R}\right)\right\} = \\
& \qquad = \Sigma_m \left[\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\frac{m\pi l}{h}(a_m + d_m)\, I_0\left(\frac{m\pi l}{h}\right) - a_m I_1\left(\frac{m\pi l}{h}\right)\right] \\
& \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu}(a_i + d_i)\left[2k_i \frac{h}{R} \operatorname{Cos}\left(k_i \frac{h}{R}\right) + \operatorname{Sen}\left(k_i \frac{h}{R}\right) + \right. \\
& \qquad\qquad + (a_i - d_i) \operatorname{Sen}\left(k_i \frac{h}{R}\right) = 0 .
\end{aligned}
\right.
$$

La prima e la terza dicono che u_z ed u_l si annullano per $z = 0$, la seconda e la quarta che la componente tangenziale della tensione si annulla sulla superficie cilindrica e sulla base $z = h$. La prima, la seconda e la quarta ci permettono di esprimere d'_i, d_m e d_i rispettivamente per a'_i, a_m, a_i; dalla terza deduciamo una combinazione lineare di a_i ed a'_i espressa per mezzo di tutte le costanti a_m; sicchè restano da determinare le a_m e le a_i, ovvero le a'_i, di cui ci possiamo servire per assegnare valori arbitrarii alla tensione normale sulla superficie laterale del cilindro e sulla base $z = h$. In questa Nota non vogliamo andare oltre nella discussione di queste equazioni. Vogliamo soltanto osservare che la terza delle equazioni precedenti non può essere soddisfatta in generale. Si toglie questo inconveniente introducendo in u_l un termine della forma $B_0 l$.

6. Cerchiamo cosa diventa la soluzione quando R è infinitamente piccolo rispetto ad h. Le prime delle (11) richiedono che sia $d'_i = 0$ e quindi anche $a'_i = 0$; similmente le ultime richiedono che sia $a_i = d_i = 0$; dalle seconde abbiamo $a_m = d_m = 0$ e restano soddisfatte le altre identicamente. Nella soluzione rimanente

$$u_l = B_0 l \quad , \quad u_z = A_0 z$$

poichè le costanti A_0 e B_0 devono essere scelte in modo che la tensione normale alla superficie laterale sia nulla, dev'essere

$$B_0 + \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} A_0 = 0.$$

Se quindi si vuole che sia $u_l = 0$, per $z = 0$, deve porsi $A_0 = B_0 = 0$. Togliendo questa restrizione e supponendo che z e $z - h$ non sieno infinitesimi, si ottiene la soluzione del de Saint-Venant.

Chimica. — *Sulla reazione Angeli-Rimini delle aldeidi.* Nota del Corrisp. L. Balbiano.

In risposta alle mie osservazioni [1] fatte alla critica di un mio collaboratore sull'interpretazione della costituzione dei composti di disidratazione dei glicoli che si ottengono coll'ossidazione aceto-mercurica dell'anetolo, il collega prof. Angeli fa alcuni appunti [2] ai quali rispondo con qualche ritardo perchè ho voluto corredare la risposta coi necessarî fatti sperimentali.

Nella prima parte della sua Nota il prof. Angeli ripete le stesse considerazioni che mi sono fatto io quando dai risultati analitici ho stabilito che i composti ottenuti dai glicoli differenziavano da essi per una molecola di acqua in meno, e se allora ho dato al meccanismo dell'eliminazione quella interpretazione, mi indusse a ciò il *fatto sperimentale* che quei composti, dando la reazione Angeli-Rimini coll'acido del Piloty, dovevano essere classificati per aldeidi e non per chetoni e qualunque chimico avrebbe allora data la stessa interpretazione mia.

Nella seconda parte il prof. Angeli descrive sommariamente alcune esperienze eseguite sul desossibenzoino C_6H_5-CH_2-CO-C_6H_5, sul benzoino C_6H_5-CHOH-CO-C_6H_5 e sul benzile C_6H_5-CO-CO-C_6H_5, atte a dimostrare che l'eccesso di alcali adoperato nella reazione coll'acido del Piloty reagirebbe alla sua volta sul chetone formando aldeide benzoica, la quale reagendo coll'acido del Piloty darebbe origine all'acido benzidrossamico, che si isola dal sale di rame coll'acido cloridrico diluito. Secondo il prof. Angeli la reazione aldeidica da me accertata nei diversi prodotti di disidratazione

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XX, serie 5ª, 2° sem., pag. 245.
[2] Id. id., pag. 447.