# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXI.**

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

*Seduta del 7 gennaio 1912.*

P. BLASERNA Presidente.

## MEMORIE E NOTE
## DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

### Meccanica. — *Sulle onde di canale.* Nota del Socio T. LEVI-CIVITA.

Fra le caratteristiche qualitative delle onde di canale spicca quella che fu per la prima volta segnalata da Leonardo colle parole seguenti (1): « L'impeto [cioè la propagazione della perturbazione superficiale] è molto più veloce che l'acqua; poichè *molte sono le volte* che l'onda fugge il luogo della sua creazione e l'acqua non si muove dal sito. A simiglianza dell'onda fatta il maggio nelle biade dal corso dei venti, che si vede correre l'onda per le campagne, e le biade non si muovono dal loro sito ».

A prima vista si sarebbe tratti ad interpretare con più moderno linguaggio il passo citato, assumendo che: Nel moto ondoso le singole particelle fluide oscillano intorno a posizioni medie, fisse nello spazio, senza dar luogo a traslazione d'insieme.

In realtà questa condizione è rispecchiata nelle onde rotazionali di Gerstner (2), nonchè nelle onde oscillatorie semplici di Airy (3). Ma già Stokes (4) ebbe a rilevare, studiando in seconda approssimazione le onde

(1) Cfr. *Raccolta d'autori italiani che trattano del moto dell'acqua,* t. X [Bologna, 1826], pag. 320.

(2) Cfr. per es. Appell, *Traité de mécanique rationnelle,* t. III (seconda edizione) pp. 494-501; ovvero Lamb, *Hydrodynamics* (terza edizione), pp. 395-398.

(3) Ibidem, pp. 472-473, o, rispettivamente, 347-353.

(4) Math. and phys. papers, vol. I, pp. 198, 207.

periodiche irrotazionali di tipo permanente, che esse sono di necessità accompagnate da un piccolo trasporto superficiale.

Lord Rayleigh provò poi, con una osservazione geometrica quanto mai suggestiva ed elegante, che, nel caso limite di una profondità infinita [1], il trasporto superficiale è una conseguenza inevitabile dell'assenza di rotazione molecolare, indipendente dalla condizione che la pressione sia costante sopra la superficie libera: si tratta perciò di cinematica (non di dinamica) del moto ondoso.

Comunque, rimane accertato che l'assoluta assenza di trasporto non può figurare fra i caratteri distintivi del moto ondoso. Ciò non contradice del resto all'originaria intuizione di Leonardo, dato l'inciso « *molte sono le volte* », che sembra anzi consigliare meno restrittiva interpretazione. Essa si concreta come segue: Se c'è un trasporto globale di massa, questo va esclusivamente attribuito alle disuguaglianze superficiali; gli strati profondi non vi apportano alcun contributo. Di qua la designazione di onde superficiali, attribuita da alcuni autori alle onde di cui si tratta.

Nella presente Nota mi propongo in primo luogo di dar veste analitica precisa all'anzidetta caratteristica di massa, e di ricavarne poi, come conseguenza necessaria della irrotazionalità, una espressione del flusso totale, che lascia immediatamente scorgere le proposizioni di Stokes e di Rayleigh, e le estende, contemplando canali di profondità comunque assegnata e onde pur qualunque (anche non periodiche) di tipo permanente. Ne deduco altresì una relazione generale fra elementi di media: forza viva per unità di lunghezza, livello medio, velocità di propagazione, portata relativa (quale cioè apparisce ad un osservatore collegato col profilo superiore dell'onda).

## 1. — Preliminari.

In un canale a fondo orizzontale e pareti verticali si propaghino, parallelamente alle sponde, onde di tipo permanente con velocità costante $c$.

Il fenomeno si può studiare in due dimensioni, considerando un generico piano verticale parallelo alle sponde. Riterremo che tutto abbia carattere

[1] Questa restrizione non è espressamente enunciata nel celebre scritto del Rayleigh *On waves* (Scientific papers, vol. I, pp. 263-264), ma rimane implicita nell'ammettere che il flusso, a profondità sufficiente, sia sensibilmente uniforme. Con ciò infatti si vengono a considerare costanti, lungo una stessa orizzontale, tanto la funzione di corrente $\psi$ quanto la sua derivata normale. Ora, se non si dovesse intendere « orizzontale infinitamente profonda », avremmo una funzione $\psi$, la quale si mantiene costante, assieme alla sua derivata normale, sopra una retta ben determinata. Una tale funzione sarebbe di necessità lineare, e si tratterebbe di flusso uniforme, contro l'ipotesi che, almeno alla superficie libera, si riscontri un'effettiva perturbazione ondosa.

permanente rispetto ad assi $Oxy$ animati dalla velocità stessa con cui avviene la propagazione [1].

Assumeremo l'asse $Oy$ verticale verso l'alto, e l'asse $Ox$ scorrente sul fondo, colla direzione positiva rivolta *in senso opposto* alla propagazione.

Rispetto a questi assi, il campo in cui si svolge il moto non varia col tempo: esso sarà a ritenersi una striscia indefinita L (cfr. la fig. 1), limitata inferiormente dall'orizzontale $y = 0$ (*fondo*), superiormente da una *linea libera* $l$, la quale, senza scostarsi troppo da una stessa orizzontale, può *a priori* assumere andamento comunque sinuoso ed irregolare. Analiticamente, c'è da supporre soltanto che l'ordinata $y(x)$ di $l$ (finita, continua e derivabile) rimanga compresa fra due limiti *positivi*, al variare di $x$ fra

Piano $z = x + i\, y$

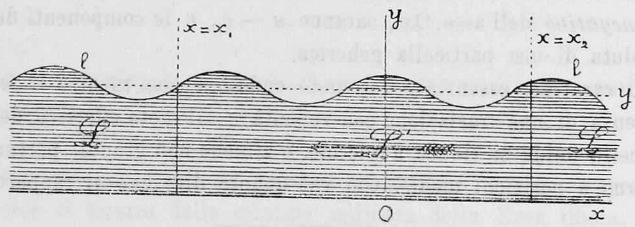


FIG 1.

$-\infty$ e $+\infty$. Va da sè che, se si tratta in particolare di onde periodiche, la funzione $y(x)$ ammette un periodo ben determinato $\lambda$ (lunghezza d'onda).

Indicheremo con $u$ e $v$ le componenti della velocità *relativa* delle particelle liquide, rispetto al sistema $Oxy$: esse sono a ritenersi funzioni delle coordinate $x$, $y$ dei punti del campo (e non del tempo $t$, attesa la stazionarietà del moto rispetto ai detti assi), continue, e finite ovunque (anche all'infinito).

Trattandosi di moto irrotazionale di un liquido (fluido incompressibile), saranno differenziali esatti

(1) $$d\varphi = u\,dx + v\,dy,$$

e

(2) $$d\psi = -v\,dx + u\,dy.$$

Il campo L essendo semplicemente connesso, le due funzioni $\varphi$ e $\psi$ (potenziale di velocità e funzione di corrente) rimangono univocamente definite a meno di costanti additive, che fisseremo convenendo p. es. che sia $\varphi = \psi = 0$ nell'origine O.

[1] Si potrebbe limitarsi ad ammettere che il solo profilo superiore (pelo libero) si sposta rigidamente, con velocità $c$. Basta questo perchè un moto irrotazionale di fluido incompressibile risulti di necessità permanente.

Siccome tanto il fondo, quanto il pelo libero $l$ costituiscono linee di flusso, sarà su entrambe $d\psi = 0$. La funzione $\psi$, che si annulla in O, ha dunque il valore zero su tutto l'asse delle ascisse, ed un valore, pure costante, che designerò con $q$, sulla linea $l$. Data la forma del campo L, ogni punto si può raggiungere dal fondo innalzandosi di un tratto finito (non superiore alla massima ordinata della linea libera). In base a ciò, segue immediatamente dalla (2) che $\psi$ (nulla sul fondo) si mantiene finita, anche all'infinito. Non così $\varphi$: vedremo più innanzi quale sia il suo comportamento asintotico.

### 2. — Caratteristica cinematica.

Dacchè i nostri assi sono animati da traslazione uniforme con velocità $c$, nel senso *negativo* dell'asse O$x$, saranno $u - c$, $v$ le componenti della velocità assoluta di una particella generica.

Ora il carattere essenziale del moto ondoso è che, mentre il fenomeno ha l'apparenza di una traslazione con velocità $c$, il moto effettivo delle singole particelle fluide si riduce a piccole, o almeno non grandi, perturbazioni locali intorno a posizioni medie. Ciò val quanto dire che il rapporto

$$\beta = \frac{\left|\sqrt{(u-c)^2 + v^2}\right|}{c}$$

fra la velocità assoluta e la velocità di propagazione deve mantenersi piuttosto piccolo: dal punto di vista matematico basta ritenere $\beta < 1$, o, più precisamente, minore dell'unità il limite inferiore dei valori assunti da $\beta$ in tutto il campo del moto.

Ne risulta in particolare che $u$ deve essere dappertutto $> 0$. Pure positivo è quindi il valore di $q$, come risulta dalla (2), immaginando di integrare lungo una verticale, a partire dal fondo fino alla linea libera.

### 3. — Portata relativa e portata assoluta.

Prendendo la densità del liquido eguale ad 1, il flusso, *nel senso della propagazione* (cioè nella direzione negativa dell'sse O$x$), attraverso un elemento $dy$ di verticale (riferito all'unità di tempo e all'unità di larghezza del canale), vale manifestamente

$$-u\,dy,$$

se si considera la verticale collegata cogli assi O$xy$; vale invece

$$(c-u)\,dy,$$

ove si tratti di una verticale fissa nello spazio.

Nel primo caso, la verticale stessa ha per equazione $x =$ costante; nel secondo $x = \xi + ct$ (dove $\xi$ è una costante). Comunque, la portata totale si ha integrando, rispetto ad $y$, dal fondo fin sulla linea libera.

A norma della (2), lungo ogni verticale, $u\,dy = d\psi$, quindi la portata *relativa* è $-q$, e l'*assoluta*

$$Q = \int (c - u)\,dy = cy - q, \tag{3}$$

indicando $y$ l'ordinata di $l$ (in generale variabile col tempo) che corrisponde alla verticale fissa considerata. Se $y(x)$ è l'espressione dell'ordinata di $l$ corrispondente all'ascissa generica $x$, nell'ultimo membro della (3), si deve intendere $y(\xi + ct)$.

## 4. — Caratteristica di massa: assenza di trasporto negli strati profondi.

Chiamiamo *profondo* un punto o un tratto di canale sempre immersi, situati cioè al disotto della minima ordinata della linea libera. Ove sia $\varepsilon$ un generico elemento profondo di verticale *fissa*, la caratteristica di massa consiste in questo [1]:

La quantità d'acqua che passa attraverso $\varepsilon$ (in un senso determinato), durante un tempo comunque lungo, rimane sempre finita.

Valutiamo in primo luogo la quantità d'acqua in questione. Ove la si designi con $m$ (considerandola come positiva nel senso della propagazione), e sia $(t_1, t_2)$ l'intervallo di tempo che si vuol considerare, si avrà manifestamente [2]

$$m = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} (c - u)\,dt .$$

La $u$ sotto il segno si riferisce agli argomenti $x = \xi + ct$ e $y$, essendo $\xi$ costante (ascissa dell'elemento $\varepsilon$ contata a partire da un'origine fissa) e $y$ pure costante (ordinata dello stesso elemento $\varepsilon$).

[1] Mi riferisco ad elementi verticali per comodità di espressione. Nello stesso modo si comportano elementi comunque orientati. La conclusione finale concernente $\varphi$ potrebbe essere stabilita considerando elementi di direzione arbitraria (purchè soltanto non orizzontali).

[2] Si noti che, nell'attribuire ad un elemento $\varepsilon$ la portata $(c - u)\,\varepsilon\,dt$, per tutti i $dt$ dell'intervallo di tempo considerato, si sfrutta l'ipotesi che l'elemento sia profondo. Infatti, ove esso restasse per qualche po' al disopra della linea libera, bisognerebbe, nei tempuscoli corrispondenti, sostituire zero a $(c - u)\,\varepsilon\,dt$.

Introduciamo $x$ al posto di $t$ come variabile di integrazione, e rappresentiamo con $x_1, x_2$ i valori di $x$ che, a norma di $x = \xi + ct$, corrispondono rispettivamente a $t_1, t_2$. Tenuto conto che $u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, si ha

$$m = \varepsilon \{ c(x_2 - x_1) - [\varphi(x_2, y) - \varphi(x_1, y)] \},$$

e la circostanza che $m$ deve rimanere finito, qualunque siano $t_1, t_2$ (e di conseguenza $x_1, x_2$), equivale, come tosto si riconosce, a quest'altra: La funzione

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) - cx \tag{4}$$

si mantiene finita, anche al crescere indefinito di $x$, per tutti i valori di $y$ inferiori alla minima ordinata della linea libera $l$. Quest'ultima restrizione si può togliere, ritenendo in definitiva $\Phi(x, y)$ *finita, anche all'infinito, in tutto il campo* L *del moto*. Per giustificarlo, basta pensare che, da un punto qualunque di L, si può raggiungere un punto profondo, scendendo verticalmente di un tratto finito (inferiore alla massima ordinata della linea libera). Il divario fra i valori di $\Phi$ in questi due punti non può superare il prodotto della differenza di livello per il limite superiore di

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right| = |v|,$$

che è per ipotesi finito, c. d. d.

## 5. — Introduzione delle variabili complesse.

Segue dal n. 1, ed è del resto notorio, che, posto

$$\begin{cases} z = x + iy, \\ f = \varphi + i\psi, \\ w = u - iv, \end{cases} \tag{5}$$

$f$ e $w$ risultano funzioni della variabile complessa $z$, uniformi della striscia L, sussistendo l'identità

$$\frac{df}{dz} = w. \tag{6}$$

Le premesse concernenti $u, v$ assicurano che $w$ è regolare in L e rimane ovunque (anche all'infinito) *finita e diversa da zero*. Quest'ultima circostanza segue dall'essere positivo il limite inferiore di $u$ [n. 2].

Quanto ad $f$, il relativo comportamento risulta subito dall'osservare cho $\psi$ rimane finita [n. 1], mentre $\varphi$ differisce da $cx$ per una $\Phi(x, y)$ pure ovunque finita [n. prec.].

Ne segue (cosa pur nota, che già altra volta [1] ebbi occasione di richiamare con tutto dettaglio) che i valori presi da $f$ in L riempiono, nel piano complesso $\varphi + i\psi$, la striscia S (fig. 2) compresa fra le rette $\psi = 0$, $\psi = q$, per modo che c'è corrispondenza biunivoca fra i due campi.

Mentre $z$ percorre (nel senso delle $x$ crescenti) il fondo, ovvero la linea libera $l$, $f$ percorre (nel senso delle $\varphi$ crescenti) l'asse reale $\psi = 0$, o rispettivamente la sua parallela $\psi = q$, essendo in particolare $f = 0$ per $z = 0$.

A punti all'infinito del campo L ($x = \pm\infty$) corrispondono punti pure all'infinito della striscia S (e dalla stessa banda, $\varphi = \pm\infty$).

Piano $f = \varphi + i\psi$

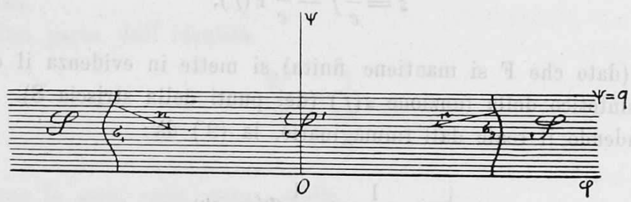


Fig. 2.

Ove si ponga

$$\Psi = \psi - cy, \tag{7}$$

$$\mathrm{F} = \Phi + i\Psi, \tag{8}$$

le (4) e (7) si possono compendiare in

$$f(z) = cz + \mathrm{F}, \tag{9}$$

da cui apparisce che F è funzione della variabile complessa $z$, ovunque finita nel campo L, anche al crescere indefinito di $z$.

Derivando e badando alla (6), si ha

$$w - c = \frac{d\mathrm{F}}{dz}.$$

Il numero complesso del primo membro rappresenta manifestamente la *velocità assoluta* (in senso vettoriale). Ricordando il significato di $\beta$, ne desumiamo

$$\beta = \frac{1}{c}\left|\frac{d\mathrm{F}}{dz}\right|. \tag{10}$$

[1] *Sulle onde progressive di tipo permanente*, in questi Rendiconti, vol. XVI (2° semestre 1907), pp. 777-790.

## 6. — Inversione.

Se si pensa che la forma del campo L non è *a priori* determinata, ma dipende dalla linea libera $l$, mentre il campo S si presenta, in ogni caso di moto ondoso, come una striscia rettilinea compresa fra l'asse reale $\psi = 0$ e la sua parallela $\psi = q$, appare vantaggioso di assumere come variabile indipendente la $f$, anzichè il posto $z$, risguardando invece la stessa $z$ e, di conseguenza, la velocità $w$ come funzioni di $f$ entro S.

In questa accezione conviene immaginare anche F espressa per $f$ (anzichè per $z$). La (9) si scrive in conformità

$$z = \frac{1}{c} f - \frac{1}{c} \mathrm{F}(f), \tag{9'}$$

con che (dato che F si mantiene finita) si mette in evidenza il comportamento asintotico della funzione $z(f)$ (dei punti della striscia S).

Scindendo il reale dall'immaginario, la (9') dà:

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{c} \varphi - \frac{1}{c} \Phi(\varphi , \psi) , \\ y &= \frac{1}{c} \psi - \frac{1}{c} \Psi(\varphi , \psi) . \end{aligned} \right. \tag{9''}$$

## 7. — Flusso integrale durante un intervallo di tempo qualsiasi.

Inteso che si tratta di flusso assoluto, basterà integrare l'espressione (3) di Q fra i due istanti $t_1 , t_2$ che limitano l'intervallo.

Colla stessa trasformazione impiegata al n. 4, si ha dalla (3)

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{Q}\, dt = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} (cy - q)\, dx ,$$

donde una prima espressione del trasporto globale M (attraverso una verticale fissa)

$$\mathrm{M} = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx - \frac{q}{c} (x_2 - x_1), \tag{11}$$

Dalla (3) stessa, ove si lasci indicata l'integrazione rispetto ad $y$, e si designi con L' quella porzione di L, che sta fra le ascisse $x_1$ ed $x_2$, con $d$L un generico elemento di campo, si ha pure

$$\mathrm{M} = \int_{\mathrm{L}'} \left( c - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) d\mathrm{L} . \tag{11'}$$

Poniamo mente alla corrispondenza biunivoca fra le due striscie L ed S; chiamiamo S' la porzione di quest'ultima, che fa riscontro ad L'; e notiamo che la (9) [ovvero l'inversa (9')] stabilisce una rappresentazione conforme fra i due campi. Il modulo della rappresentazione (rapporto fra un elemento $|dz|$ del piano $z$ e il corrispondente elemento $|df|$ del piano $f$) è $\left|\frac{dz}{df}\right|$. Dette perciò $d$L e $d$S due areole corrispondenti dei due piani, si avrà

$$dL = \left|\frac{dz}{df}\right|^2 dS\,, \tag{12}$$

dove si può, a piacere, considerare $z$ come funzione di $f$ [definita dalla (9)'], o viceversa.

D'altra parte, dall'identità

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\dfrac{dz}{df}}$$

eguagliando le parti reali, segue subito

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial\varphi}\,\frac{1}{\left|\dfrac{dz}{df}\right|^2}$$

Con ciò la (11'), ove si adottino come variabili d'integrazione $\varphi$ e $\psi$, in luogo di $x, y$, assume l'aspetto

$$M = \int_{S'}\left\{\left|\frac{dz}{df}\right|^2 - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right\} dS$$

Le (9') ed (8) [attesa la monogeneità di $F(\varphi + i\psi)$] dànno

$$\frac{dz}{df} = \frac{1}{c} - \frac{1}{c}\frac{dF}{df} = \frac{1}{c}\left(1 - \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{i}{c}\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}$$

da cui

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{c^2}\left|\frac{dF}{df}\right|^2,$$

ovvero anche, considerando F funzione di $f$ pel tramite di $z$ e ricordando la (10),

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 = \frac{1}{c^2}\left(1 - 2\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\right) + \beta^2\left|\frac{df}{dz}\right|^2.$$

Di qua, ove si noti che, per la prima delle (9″),

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi},$$

si ricava

$$\left|\frac{dz}{df}\right|^2 - \frac{1}{c}\frac{\partial x}{\partial \varphi} = - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \beta^2 \left|\frac{df}{dz}\right|^2.$$

La precedente espressione di M, ponendo

$$\text{(13)} \qquad \mathrm{N} = - \frac{1}{c^2}\int_{\mathrm{S}'} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\, d\mathrm{S}\,,$$

e riprendendo nell' integrale residuo le variabili $x$, $y$, può in definitiva essere scritta

$$\text{(14)} \qquad \mathrm{M} = \int_{\mathrm{L}'} \beta^2\, d\mathrm{L} + \mathrm{N}\,.$$

## 8. — Teorema (generalizzato) di Stokes-Rayleigh.

Verificheremo tra un momento che l'addendo N si mantiene sempre finito, anche al crescere indefinito della lunghezza del tratto L'.

Il primo addendo è invece essenzialmente positivo. Di qua l'interesse della trasformazione eseguita, la quale consente senz'altro di affermare che: *di regola — in particolare ogniqualvolta si tratti di onde periodiche — il trasporto globale* M *cresce indefinitamente con* L', *cioè coll'intervallo di tempo, durante il quale lo si considera.*

È questo il teorema (generalizzato) di Stokes-Rayleigh.

Resta da giustificare l'affermazione che N si mantiene finito.

Notiamo all'uopo che il campo S' del piano $f$ (fig. 2) è limitato dalle due parallele $\psi = 0$, $\psi = q$, nonchè da due trasversali $\sigma_1$, $\sigma_2$, immagini delle verticali $x = x_1$, $x = x_2$ del piano $z$.

Detto complessivamente $\sigma'$ l' intero contorno di S', $d\sigma'$ un suo elemento, $n$ la direzione della normale volta verso l' interno di S', si ha, applicando il lemma di Green,

$$\mathrm{N} = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma'} \Phi \cos(\widehat{n\varphi})\, d\sigma'\,.$$

Siccome, sulle parallele $\psi = 0$, $\psi = q$, $\cos(\widehat{n\varphi})$ si annulla, così rimane

$$\mathrm{N} = \frac{1}{c^2}\int_{\sigma_1 + \sigma_2} \Phi \cos(\widehat{n\varphi})\, d\sigma'\,.$$

L'elemento $d\sigma'$ di una delle due trasversali e l'elemento $dy$ della verticale corrispondente stanno nel rapporto, essenzialmente finito, $\left|\frac{df}{dz}\right|$ (eguale alla velocità relativa $|w|$). Ovunque finita è del pari la funzione $\Phi$ [n. 4].

Detto pertanto P il prodotto della massima ordinata di $l$ per il limite superiore del modulo di $\Phi w$ in tutto il campo del moto, si ha subito (immaginando di riportare l'integrale testè scritto al piano $z$),

$$|\mathrm{N}| \leq \frac{2\,\mathrm{P}}{c^2},$$

c. d. d.

*Osservazione* I. In prima approssimazione, trattando cioè come una quantità di primo ordine il rapporto $\beta$ (fra la velocità assoluta e la velocità di propagazione) e trascurando in conformità $\beta^2$, M si riduce ad N. Vi è incluso in particolare il noto risultato della teoria elementare di Airy (in cui si trascura appunto $\beta^2$), che le onde oscillatorie semplici non dànno luogo a spostamenti globali di massa.

*Osservazione* II. L'espressione (14) di M mostra altresì che il trasporto superficiale deve avvertirsi non appena si spinga l'approssimazione fino a tener conto dei termini di second'ordine in $\beta$. Ciò è appunto accaduto a Stokes fin dal 1847.

### 9. — Relazione generale fra elementi globali.

Supponiamo che esista un *livello medio* (in senso asintotico), ossia che il valor medio dell'ordinata $y$

$$\frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\,dx\,.$$

relativo ad un generico tratto di canale $(x_1\,,x_2)$, ammetta un limite ben determinato $h$ al crescere indefinito del tratto.

Notiamo che questa condizione è sempre soddisfatta quando si tratta di onde periodiche. In tal caso il livello medio asintotico coincide, come si verifica immediatamente, col valore medio relativo ad un'onda generica, cioè con

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} y(x)\,dx\,,$$

$\lambda$ essendo la lunghezza d'onda.

Notiamo ancora che l'ipotesi di esistenza di un livello medio, esplicitamente enunciata per preoccupazione di rigore matematico, non costituisce dal punto di vista fisico restrizione alcuna, essendo implicita tra le caratteristiche intuitive del moto ondoso.

Ciò posto, eguagliamo le due espressioni (14) ed (11) di M. Moltiplicando da una parte e dall'altra per $\frac{1}{2}\frac{c^2}{x_2-x_1}$, si ha subito

$$\frac{1}{x_2-x_1}\frac{1}{2}\int_{L'} c^2\beta^2\, d\mathrm{L} = \frac{1}{2}c^2\left\{\frac{1}{x_2-x_1}\int_{x_1}^{x_2} y\, dx - \frac{q}{c}\right\} - \frac{1}{2}c^2\frac{\mathrm{N}}{x_2-x_1}.$$

Al crescere indefinito dell'intervallo $x_2 - x_1$, la quantità in parentesi converge verso $\frac{1}{2}c^2\left(h-\frac{q}{c}\right)$, mentre l'ultimo termine ha per limite zero.

Anche il primo membro converge dunque verso un limite ben determinato $\tau$: e questo (ricordando che $\beta^2 c^2$ rappresenta la velocità assoluta) dimostra che esiste un valore medio (in senso asintotico) dell'energia cinetica del moto ondoso per unità di lunghezza (e di larghezza) del canale. Di più sussiste la relazione notevole

$$\tau = \frac{1}{2}c^2\left(h-\frac{q}{c}\right). \tag{15}$$

Nel caso di onde periodiche, $\tau$ si identifica naturalmente coll'energia cinetica di un'onda, divisa per la lunghezza d'onda.

## Botanica. — *Ricerche sulla morfologia e sull'accrescimento dello stipite delle Palme*. Nota preventiva del Socio A. Borzì e del dott. G. Catalano.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

## Matematica. — *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche.* Nota del Corrispondente F. Enriques.

1. In una Nota, che ho avuto l'onore di presentare all'Accademia nella seduta del 2 decembre 1906 [1] ho dimostrato che le superficie possedenti infinite trasformazioni birazionali in sè contengono in generale un fascio di curve ellittiche, le sole eccezioni appartenendo alla famiglia delle rigate o a quella delle superficie coi generi $p_a = p_g = \mathrm{P}_2 = \mathrm{P}_3 = \cdots = 1$. Per contro ho fatto notare che ogni superficie contenente un fascio di curve ellittiche C ammette infinite trasformazioni birazionali in sè, *purchè esistano due curve secanti le* C *in gruppi di punti i cui multipli non sieno equivalenti*. L'esame delle condizioni a cui conduce siffatta ipotesi (esame ch'io

[1] *Sulle superficie algebriche, che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali,* Rend., vol. XV, ser. 5ª, pag. 665.