ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Meccanica. — *Sulla conservazione dell'energia e della materia nel campo gravitazionale.* Nota di MAX ABRAHAM, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nella meccanica di Minkowski (¹) le equazioni del moto stabiliscono che la *forza del moto*, cioè il prodotto della massa per il vettore universale di accelerazione, sia eguale al vettore universale della *forza motrice*. Riferendo entrambi i vettori all'unità di volume, ed indicando con ν la *densità di riposo* della materia, le equazioni indefinite del moto si scrivono

$$(1) \qquad \nu\ddot{x} = K_x \;,\quad \nu\ddot{y} = K_y \;,\quad \nu\ddot{z} = K_z \;,\quad \nu\ddot{u} = K_u \,.$$

Introduciamo un *tensore universale* simmetrico, le cui dieci componenti:

$$X_x \,,\, Y_y \,,\, Z_z \,,\, U_u \;,\; X_y = Y_x \;,\; Y_z = Z_y \;,\; Z_x = X_z \,,$$
$$X_u = U_x \;,\; Y_u = U_y \;,\; Z_u = U_z$$

si trasformano come i quadrati ed i prodotti delle componenti di un vettore universale (di prima specie); da questo tensore deriviamo la forza motrice unitaria colle formole

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} K_x &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \frac{\partial X_u}{\partial u} \,, \\ K_y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \frac{\partial Y_u}{\partial u} \,, \\ K_z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \frac{\partial Z_u}{\partial u} \,, \\ K_u &= \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{\partial U_u}{\partial u} \,. \end{aligned} \right.$$

Tale rappresentazione della forza motrice è sempre possibile nell'elettrodinamica (³). Essa si trova pure nella teoria dell'elasticità, sviluppata dall'Herglotz (³) in base al principio di relatività. Infine la forza motrice della gravitazione si deduce da un tensore universale, come dimostrai in una Nota recente (⁴); occorre però collegare il potenziale gravitazionale Φ colla velo-

(¹) H. Minkowski, *Spazio e tempo*. Nuovo Cimento, XVIII (1909).

(²) M. Abraham, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1909², 1910².

(³) G. Herglotz, Annalen der Physik. 36, pag. 493, 1911.

(⁴) M. Abraham, Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, XX, fasc. 12°, 1911²; XXI, fasc. 1°, 1912¹.

cità della luce (c) nel modo seguente:

$$\tag{3} \tfrac{1}{2}\, c^2 = \Phi + \text{costante}.$$

In quanto a questa costante addizionale, conviene porla eguale a zero [1], togliendo così l'arbitrarietà del potenziale Φ; altrimenti con essa si introdurrebbe una nuova costante universale, probabilmente priva di significato fisico. In ogni modo dalla (3) segue

$$\tag{3a} c \operatorname{grad} c = \operatorname{grad} \Phi \quad , \quad c \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}.$$

La variabilità di c fa sì, che il gruppo di Lorentz vale soltanto nell'infinitesimo, essendo

$$dx\,,\, dy\,,\, dz \quad \text{e} \quad du = i\,c\,d\,t$$

le componenti di uno spostamento infinitesimo in uno spazio a quattro dimensioni.

Rappresentiamo nella forma (2) le forze motrici elettrodinamiche, elastiche e gravitazionali, derivando ognuna di esse dal *tensore universale motore* corrispondente. Indicheremo nel seguito con K la forza motrice risultante, dedotta nelle (2) dal tensore motore risultante T.

Alla *forza del moto* si può dare una forma analoga. Ammettiamo la *condizione di continuità* [2] di Minkowski

$$\tag{4} \frac{\partial}{\partial x}(\nu \dot{x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \dot{y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \dot{z}) + \frac{\partial}{\partial u}(\nu \dot{u}) = 0.$$

Allora valgono relazioni del tipo:

$$\nu \ddot{x} = \nu \frac{d\dot{x}}{d\tau} = \nu \dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \nu \dot{y} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} + \nu \dot{z} \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} + \nu \dot{u} \frac{\partial \dot{x}}{\partial u}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\nu \dot{x}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\nu \dot{x}\dot{y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\nu \dot{x}\dot{z}) + \frac{\partial}{\partial u}(\nu \dot{x}\dot{u}).$$

Esse ci permettono di scrivere le componenti della forza del moto

$$\tag{5} \left\{ \begin{aligned} \nu \ddot{x} &= -\left(\frac{\partial X^*_x}{\partial x} + \frac{\partial X^*_y}{\partial y} + \frac{\partial X^*_z}{\partial z} + \frac{\partial X^*_u}{\partial u} \right), \\ \nu \ddot{y} &= -\left(\frac{\partial Y^*_x}{\partial x} + \frac{\partial Y^*_y}{\partial y} + \frac{\partial Y^*_z}{\partial z} + \frac{\partial Y^*_u}{\partial u} \right), \\ \nu \ddot{z} &= -\left(\frac{\partial Z^*_x}{\partial x} + \frac{\partial Z^*_y}{\partial y} + \frac{\partial Z^*_z}{\partial z} + \frac{\partial Z^*_u}{\partial u} \right), \\ \nu \ddot{u} &= -\left(\frac{\partial U^*_x}{\partial x} + \frac{\partial U^*_y}{\partial y} + \frac{\partial U^*_z}{\partial z} + \frac{\partial U^*_u}{\partial u} \right). \end{aligned} \right.$$

(1) Questa semplificazione devo ad un gentile suggerimento del prof. Planck.

(2) Resta escluso in questa Nota lo sviluppo di calore, il quale modificherebbe la equazione di continuità (4) come pure le equazioni del moto (1).

Questo tensore T* chiamiamo *tensore universale del moto*; le sue dieci componenti determinano le *tensioni cinetiche*:

(5a)
$$X_x^\star = -\nu\dot{x}^2\,,\quad Y_y^\star = -\nu\dot{y}^2\,,\ Z_z^\star = -\nu\dot{z}^2\,,$$
$$X_y^\star = Y_x^\star = -\nu\dot{x}\dot{y}\,,\ Y_z^\star = Z_y^\star = -\nu\dot{y}\dot{z}\,,\ Z_x^\star = X_z^\star = -\nu\dot{z}\dot{x}\,,$$

la *corrente di energia* (S*) e l'*impulso unitario* (*g**) *della materia*:

(5b)
$$\begin{cases} S_x^\star = c^2\,g_x^\star = icX_u^\star = icU_x^\star = -ic\nu\dot{x}\dot{u} = \nu c^2\dot{x}\dot{t}\,,\\ S_y^\star = c^2\,g_y^\star = icY_u^\star = icU_y^\star = -ic\nu\dot{y}\dot{u} = \nu c^2\dot{y}\dot{t}\,,\\ S_z^\star = c^2\,g_z^\star = icZ_u^\star = icU_z^\star = -ic\nu\dot{z}\dot{u} = \nu c^2\dot{z}\dot{t}\,,\end{cases}$$

ed infine la *densità dell'energia della materia*:

(5c)
$$\varepsilon^\star = U_u^\star = -\nu\dot{u}^2 = \nu c^2(\dot{t})^2 = \mu c^2 k^{-1}\,,$$

essendo

(6)
$$\mu = \nu\dot{t} = \nu\frac{dt}{d\tau} = \nu k^{-1}$$

la *densità della materia*.

Siccome si ha

(6a)
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}\,\dot{t} = \frac{dx}{dt}\,k^{-1} = v_x k^{-1}\ \ldots\quad (v \text{ vettore velocità}),$$

le (5b, 5c) dànno

(6b)
$$S^\star = c^2 g^\star = \mu c^2 k^{-1}\,.\,v = \varepsilon^\star\,.\,v$$

per la *corrente di energia trasportata dalla materia*.

In modo analogo il tensore motore risultante T individua le risultanti delle tensioni, correnti (S) e densità (ε) di energia elastiche, elettromagnetiche e gravitazionali. Dalle (1), (2) e (5) seguono, riunendo i tensori T e T*, i *teoremi dell'impulso e dell'energia* nella forma:

(7)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial(cg_x + cg_x^\star)}{c\,\partial t} = \dfrac{\partial(X_x + X_x^\star)}{\partial x} + \dfrac{\partial(X_y + X_y^\star)}{\partial y} + \dfrac{\partial(X_z + X_z^\star)}{\partial z}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial(cg_y + cg_y^\star)}{c\,\partial t} = \dfrac{\partial(Y_x + Y_x^\star)}{\partial x} + \dfrac{\partial(Y_y + Y_y^\star)}{\partial y} + \dfrac{\partial(Y_z + Y_z^\star)}{\partial z}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial(cg_z + cg_z^\star)}{c\,\partial t} = \dfrac{\partial(Z_x + Z_x^\star)}{\partial x} + \dfrac{\partial(Z_y + Z_y^\star)}{\partial y} + \dfrac{\partial(Z_z + Z_z^\star)}{\partial z}\,;\end{cases}$$

(8)
$$\frac{\partial(\varepsilon + \varepsilon^\star)}{\partial t} = -c\,\mathrm{div}\left(\frac{S + S^\star}{c}\right).$$

Occorre ora discutere queste formole, per far rilevare l'influenza della variazione di c nel campo gravitazionale, completando i risultati della Nota precedente [1].

Dalla (8) segue per un campo stazionario

$$\operatorname{div}\left(\frac{S+S^\star}{c}\right)=0;$$

cioè: Il vettore della corrente stazionaria di energia, diviso per la velocità della luce, è solenoidale. Dunque, se una quantità di energia di riposo (E_0) viene trasferita dal potenziale Φ_0 al potenziale superiore Φ, la energia di riposo, che arriva al livello Φ, è maggiore di E_0, e precisamente eguale a

$$E=E_0\cdot\frac{c}{c_0}. \tag{9}$$

Quindi *la legge della conservazione dell'energia vale, non già per l'energia di riposo stessa, ma per questa energia divisa per la velocità della luce.* Essendo, secondo la (3),

$$c=\sqrt{c_0^2+2(\Phi-\Phi_0)}\quad,\quad\frac{c}{c_0}=\sqrt{1+\frac{2(\Phi-\Phi_0)}{c_0^2}}\,,$$

si può in modo approssimativo scrivere la (9)

$$E=E_0+\frac{E_0}{c_0^2}(\Phi-\Phi_0)\,, \tag{9a}$$

ed interpretare questa formola, come fece l'Einstein [2], *attribuendo alla energia una massa pesante eguale — come pure la massa inerte — alla energia di riposo divisa per il quadrato della velocità della luce.*

Questa spiegazione diventa ancora più attendibile per la (8); scriviamo il secondo membro di questa equazione, tenendo conto della (3*a*):

$$\begin{aligned}-c\operatorname{div}\left(\frac{S+S^\star}{c}\right)&=-\operatorname{div}(S+S^\star)+\frac{(S+S^\star)}{c^2}\cdot\operatorname{grad}\Phi\\&=-\operatorname{div}(S+S^\star)-(g+g^\star)\cdot F\,,\end{aligned}$$

dove F indica la forza gravitazionale agente sulla massa unitaria.

Allora il *teorema della conservazione dell'energia per un campo qualsiasi* diventa:

$$-\frac{\partial(\varepsilon+\varepsilon^\star)}{\partial t}=\operatorname{div}(S+S^\star)+(g+g^\star)\cdot F\,. \tag{10}$$

[1] M. Abraham, Rend. della R. Accad. dei Lincei, XXI, 1° fasc., 1912.
[2] A. Einstein, Annalen der Physik, 35, pag. 902, 1911.

Risalta il significato del termine (ved. 6*b*)

$$g^\star \cdot \mathrm{F} = \frac{\mathrm{S}^\star}{c^2} \cdot \mathrm{F} = \frac{\varepsilon^\star}{c^2}\, v \cdot \mathrm{F} = \mu k^{-1}\, v \cdot \mathrm{F} \tag{10a}$$

come lavoro compiuto dalla gravità nel moto della materia; *ed è precisamente la massa trasversale* (di densità μk^{-1}) *sulla quale agisce la gravità.* Nell'espressione (10) del teorema della conservazione dell'energia va tenuto conto di questo lavoro, come pure di un *lavoro analogo compiuto dalla gravità in una corrente di energia qualsiasi.*

Siccome la massa m della materia è eguale al rapporto tra energia di riposo E e c^2, la *legge della conservazione della materia*, identica a quella della conservazione dell'energia, diventa:

$$m\,c = \text{costante}. \tag{11}$$

Nel campo gravitazionale rimane costante il prodotto della massa per la velocità della luce.

Così si spiega la forma data in una Nota precedente [1] all'equazione dell'energia per un punto materiale moventesi in un campo gravitazionale statico:

$$\frac{d}{d\tau}\,(ck^{-1}) = 0\,. \tag{11a}$$

Difatti, moltiplicando per la costante $m\,c$, si ottiene

$$\frac{d}{d\tau}\,(m\,c^2\,k^{-1}) = 0\,, \tag{11b}$$

e si giunge all'espressione solita $(m\,c^2 k^{-1})$ assegnata dalla teoria di relatività all'energia della materia in moto.

Dalle (11) e (3) segue

$$\dot{m}\,c + m\,\dot{c} = \dot{m}\,c + \frac{m}{c}\,\dot{\Phi} = 0\,;$$

quindi

$$\dot{m} = -\frac{m}{c^2}\,\dot{\Phi}\,. \tag{12}$$

Un risultato analogo relativo alla densità μ della materia si ottiene dalla equazione di continuità (4), la quale può scriversi

$$\operatorname{div} \mu v + \frac{\partial \mu c}{c\,\partial t} = 0\,,$$

(1) M. Abraham, Rend. della R. Acc. dei Lincei, XX, fasc. 12, 1911, equazione (9).

ossia, secondo la (3*a*),

$$(12a)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial t} = -\operatorname{div}\mu v - \frac{\mu}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}.$$

Le (12) e (12*a*) indicano la variazione col tempo della massa e della sua densità nel campo gravitazionale.

Di questa influenza del potenziale gravitazionale bisogna pure tenere conto nel calcolare il cambiamento, che l'impulso subisce col tempo. Abbiamo, per la prima componente della *forza del moto di un punto materiale*

$$m\ddot{x} = \frac{d}{d\tau}(m\dot{x}) - \dot{x}\dot{m} = \frac{d}{d\tau}(m\dot{x}) + \frac{m\dot{x}}{c^2}\dot{\Phi};$$

perciò la prima delle equazioni del moto diventa

$$(13)\qquad \frac{d}{d\tau}(m\dot{x}) + \frac{m\dot{x}}{c^2}\dot{\Phi} = -m\frac{\partial\Phi}{\partial x}.$$

Passando all'unità di volume di un corpo continuo, al suo impulso $g^\star$ ed alla derivazione locale, il primo membro della (13) corrisponde all'espressione seguente:

$$(13a)\qquad \frac{\partial g_x^\star}{\partial t} + \frac{g_x^\star}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \frac{\partial g_x^\star}{\partial t} + \frac{g_x^\star}{c}\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial c g_x^\star}{c\,\partial t}.$$

Ora si spiega la presenza di questi termini e di termini analoghi relativi all'impulso del campo elettromagnetico e gravitazionale ed all'impulso prodotto dallo stato di tensione della materia, nell'*espressione generale* (7) del *teorema dell'impulso*. Possiamo, in virtù della (13*a*), scrivere la prima delle (7):

$$(14)\qquad \frac{\partial(g_x + g_x^\star)}{\partial t} + \frac{g_x + g_x^\star}{c^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial(X_x + X_x^\star)}{\partial x} + \frac{\partial(X_y + X_y^\star)}{\partial y} + \frac{\partial(X_z + X_z^\star)}{\partial z}.$$

Riassumendo l'interpretazione data ai termini introdotti nei teoremi dell'impulso (14) e dell'energia (10) dal variare della velocità della luce col potenziale gravitazionale, abbiamo l'enunciato espressivo che *nel campo gravitazionale le leggi della conservazione della materia e dell'energia di riposo prendono la forma*:

$$(15)\qquad mc = \frac{E}{c} = \text{costante}.$$