ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Fisica matematica. — *Sulla propagazione del calore.* Nota del dott. L. SILLA, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. La celebre Memoria del Poincaré *Sur les équations de la Physique mathématique* (¹) e gli altri lavori che ne seguirono, hanno posto oramai fuori di dubbio l'esistenza delle *soluzioni eccezionali* relative alle equazioni della propagazione del calore; anzi i recenti progressi sulle equazioni integrali hanno permesso di dimostrare l'esistenza di tali soluzioni in casi assai generali, circa la natura della superficie del corpo che si considera (²).

La sviluppabilità della funzione che rappresenta la temperatura iniziale del corpo in serie di soluzioni eccezionali, e, corrispondentemente, la dimostrazione di esistenza dell'integrale delle equazioni della propagazione del calore, si sono ottenute nell'ipotesi che la detta funzione sia finita e continua nel suo campo di variabilità insieme con le derivate parziali dei primi tre ordini (³), mentre la natura stessa del problema richiede al più l'esistenza delle sole derivate prime.

Un recente teorema del Weyl (⁴) permette di dimostrare la sviluppabilità della funzione in discorso e il teorema di esistenza per la soluzione del problema del calore, nell'ipotesi che la temperatura iniziale abbia le derivate prime finite nei punti dell'interno del corpo e la derivata normale nei punti della superficie, come mi propongo di mostrare nella presente Nota.

2. Il problema del raffreddamento d'un corpo omogeno ed isotropo S, limitato da una superficie σ, si riduce, com'è noto, alla determinazione di una funzione $V(x, y, z, t)$ la quale, per tutti i valori del tempo t, soddisfi alle equazioni

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial t} = K\Delta_2 V, &&\text{(nei punti di S)}\\ &\frac{dV}{dn} = hV &&\text{(nei punti di } \sigma)\end{aligned}\right.$$

e sia, inoltre,

$$(2)\qquad (V)_{t=0} = f(x, y, z).$$

(¹) Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, t. VIII (1894).

(²) G. Lauricella, *Applicazione della teoria di Fredholm al problema del raffreddamento dei corpi* (Annali di Matematica, ser. III, t. XIV, 1908).

(³) G. Lauricella, loc. cit., pag. 169 ed inoltre: *Sull'integrazione delle equazioni della propagazione del calore* [Memorie della Società italiana delle Scienze (detta dei XL), ser. III, t. XII, 1902].

(⁴) H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten* (Math. Annalen, t. LXVII, 1909) ed inoltre M. Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire par des intégrales définies* (Rend. del Circ. Mat. di Palermo, t. XXX, 1910).

La funzione V rappresenta la temperatura dei punti (x, y, z) del corpo S; K indica una costante positiva proporzionale al coefficiente di conducibilità interna del corpo; n la normale nei punti di σ, diretta positivamente verso l'interno di S; h una costante positiva proporzionale al potere emissivo della superficie σ ed $f(x, y, z)$ una funzione che rappresenta lo stato termico iniziale noto nei punti di S. Si suppone che il corpo si trovi immerso in un ambiente di cui la temperatura nei punti di σ sia eguale a zero.

L'integrazione delle equazioni (1), con la condizione (2), si può far dipendere, com'è noto, dalla soluzione del problema: Sviluppare la funzione arbitraria $f(x, y, z)$ in serie delle funzioni $p_i(x, y, z)$, integrali delle equazioni

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Delta_2 p_i + k_i p_i = 0, && \text{(nei punti di S)} \\ &\frac{dp_i}{dn} = hp_i. && \text{(nei punti di } \sigma\text{)} \end{aligned} \right.$$

Le funzioni p_i (*soluzioni eccezionali*) sono determinate ciascuna a meno di un fattore costante e formano notoriamente un sistema *ortogonale*. Il fattore costante si può determinare in modo che, oltre alla condizione,

$$\int_S p_i p_j \, dS = 0 \qquad (i \neq j),$$

si abbia ancora

$$\int_S p_i^2 \, dS = 1.$$

Le quantità k_i (*valori eccezionali* cui corrispondono le soluzioni eccezionali p_i), qualunque sia il valore di h, costituiscono una successione, crescente con i, avente per limite l'infinito.

3. Ciò premesso, noi vogliamo ora dimostrare che *la successione delle p_i è chiusa*, vale a dire che non esiste alcuna funzione $h(x, y, z)$, la quale abbia le derivate prime finite nell'interno del campo S, sia diversa da zero e tale che siano soddisfatte le infinite relazioni

$$\int_S h p_i \, dS = 0. \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots)$$

Infatti, data una funzione qualsiasi $f(x, y, z)$, definita entro S, la quale abbia le derivate prime finite (i punti di σ al più esclusi) e dato un parametro k, si sa [1] che esistono una quantità k_1 finita positiva e una funzione $w(x, y, z; k)$ che è regolare in S per $|k| < k_1$, indicando k_1 una

[1] Cfr. G. Lauricella, Annali di Matematica, loc. cit.

quantità finita positiva, e che ammette un polo semplice per $k = k_1$. La funzione w, per $|k| < k_1$, soddisfa alle equazioni

$$(4)\quad \begin{cases} \Delta_2 w + kw(x, y, z; k) + f(x, y, z) = 0, & \text{(nei punti di S)} \\ \dfrac{dw}{dn} = hw, & \text{(nei punti di } \sigma) \end{cases}$$

ed il residuo p_1 di w nel punto $k = k_1$ soddisfa alle equazioni

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta_2 p_1 + k_1 p_1 = 0, \\ \dfrac{dp_1}{dn} = hp_1. \end{cases}$$

Posto

$$w(x, y, z; k) = \frac{p_1}{k_1 - k} + w_1(x, y, z; k),$$

si ha che $w_1(x, y, z; k)$ è regolare per $|k| \leq k_1$ e, in virtù delle (3) e (5), verifica le equazioni

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta_2 w_1 + kw_1(x, y, z; k) + (f - p_1) = 0, & \text{(nei punti di S)} \\ \dfrac{dw_1}{dn} = hw_1. & \text{(nei punti di } \sigma) \end{cases}$$

Moltiplicando la prima delle (5) per $w_1(x, y, z; k_1)$ e la prima delle (6) (nelle quali si sia fatto $k = k_1$) per $p_1(x, y, z)$ e poi sottraendo membro a membro ed integrando il risultato a tutto il campo S, si ottiene

$$\int_S (w_1 \Delta_2 p_1 - p_1 \Delta_2 w_1)\, dS = \int_S p_1(f - p_1)\, dS.$$

E poichè il primo integrale è nullo, giacchè

$$\int_\sigma \left(w_1 \frac{dp_1}{dn} - p_1 \frac{dw_1}{dn} \right) d\sigma = 0,$$

si ha

$$\int_S f p_1\, dS = \int_S p_1^2\, dS \neq 0.$$

Questo risultato si può enunciare dicendo che non esiste alcuna funzione $f(x, y, z)$ del campo S, soddisfacente alle anzidette condizioni, tale che si abbia, per tutti i possibili valori dell'indice i,

$$\int f p_i\, dS = 0,$$

ossia, in altri termini, le funzioni $p_i(x, y, z)$ costituiscono una successione *chiusa*.

4. Sulla funzione $f(x, y, z)$ dei punti del campo S, che noi vogliamo rappresenti la temperatura iniziale del corpo, faremo l'ipotesi che abbia le derivate del primo ordine finite nei punti di S e la derivata normale nei punti di σ e inoltre, come si può sempre supporre [1], senza nulla togliere alla generalità, che nei punti di σ, soddisfi alla condizione

$$\frac{df}{dn} = hf.$$

Facciamo corrispondere alla funzione f la successione dei suoi *coefficienti di Fourier*.

$$A_i = \int_S f p_i \, dS \qquad (i = 1, 2, 3, ...)$$

relativa al sistema ortogonale delle p_i.

Dall'identità di Bessel si ha

$$\int_S \left\{ f - \sum_1^n {}_i A_i p_i \right\}^2 dS = \int_S f^2 \, dS - \sum_1^n {}_i A_i^2;$$

quindi dovrà aversi

$$\sum_1^n {}_i A_i^2 \leq \int_S f^2 \, dS.$$

Tanto basta per concludere che la serie $\sum_1^\infty {}_i A_i^2$ è convergente; scelto, perciò, ε positivo e piccolo a piacere, esisterà un intiero m_1 tale che, per $m > m_1$, sarà certamente soddisfatta la condizione

$$\sum_{m+1}^{m+q} {}_i A_i^2 < \varepsilon, \tag{7}$$

qualunque sia q.

Consideriamo ora la successione

$$f_j = \sum_1^j {}_i A_i p_i \qquad (j = 1, 2, 3, ...)$$

e costruiamo l'integrale

$$\int_S (f_s - f_m)^2 \, dS.$$

Se $m > m_1$ ed $s > m_1$, posto $s = m + q$, risulterà

$$\int_S (f_s - f_m)^2 \, dS = \int_S \left\{ \sum_{m+1}^{m+q} {}_i A_i p_i \right\}^2 dS = \sum_{m+1}^{m+q} {}_i A_i^2 < \varepsilon.$$

[1] Cfr. G. Lauricella, *Sulla propagazione del calore* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXXIII, 1898).

Si conclude che la successione delle funzioni f_i è *convergente in media*, secondo Fischer, in tutto il campo S, e perciò, pel teorema di Weyl, è sempre possibile di scegliere una serie di indici $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ tali che

$$f_{n_1} + (f_{n_2} - f_{n_1}) + (f_{n_3} - f_{n_2}) + \cdots$$

converge uniformemente in generale, nel campo S, verso un'unica funzione la quale ha per coefficienti di Fourier i numeri A_i. Questa funzione, poichè la successione delle p_i è chiusa, coinciderà con la funzione $f(x, y, z)$ che esprime le condizioni termiche iniziali del corpo S. Se poniamo, quindi

$$v_1 = f_{n_1}\ ,\quad v_i = f_{n_i} - f_{n_{i-1}} = \sum_{n_{i-1}+1}^{n_i}{}_r\, A_r\, p_r\ ,$$

la serie

(8) $$v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_i + \cdots$$

sarà equiconvergente in generale in tutto il campo S e si avrà, poichè la successione delle p_i è chiusa,

$$f(x, y, z) = \sum_1^\infty{}_i\, v_i\,.$$

5. Tenuto ora presente che i numeri k_r costituiscono una successione avente per limite l'infinito (n. 2), sarà possibile, per un determinato valore positivo di t e per qualunque valore dell'indice r superiore ad un certo numero intero, di soddisfare alla disuguaglianza

(9) $$k_r^4\, e^{-2\mathrm{K} k_r t} < 1\,.$$

Poniamo

$$v'_i = \sum_{n_{i-1}+1}^{n_i}{}_r\, A_r\, p_r\, k_r^2\, e^{-\mathrm{K} k_r t}\,,$$

dove $n_1, n_2, n_3, \dots, n_i, \dots$ sono gli *stessi* numeri precedentemente determinati, in virtù del teorema di Weyl, e si consideri la nuova successione

$$\varphi'_j = \sum_1^j{}_i\, v'_i : \qquad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

per $s = d + q$ avremo

$$\int_S (\varphi'_s - \varphi'_d)^2\, dS = \int_S \left(\sum_{d+1}^{d+q}{}_i\, v'_i\right)^2 dS =$$

$$= \int_S \left\{\sum_{n_d+1}^{n_{d+q}}{}_r\, A_r\, p_r\, k_r^2\, e^{-\mathrm{K} k_r t}\right\}^2 dS = \sum_{n_d+1}^{n_{d+q}}{}_r\, A_r^2\, k_r^4\, e^{-2\mathrm{K} k_r t}\,.$$

Segue, avuto riguardo alle (7) e (9), che la serie $\sum_1^\infty {}_i\, \varphi'_i$ è *convergente in media*; quindi, pel teorema di Weyl, esisteranno dei numeri interi, positivi crescenti $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ tali che la serie

$$(10) \qquad \varphi'_{\lambda_1} + (\varphi'_{\lambda_2} - \varphi'_{\lambda_1}) + (\varphi'_{\lambda_3} - \varphi'_{\lambda_2}) + \cdots$$

è equiconvergente in generale nel campo S. Ma, in virtù della equiconvergenza in generale della serie (8), si può dire certamente che, posto $u_i = \sum_1^i {}_r\, v_r$, la serie

$$(11) \qquad u_{\lambda_1} + (u_{\lambda_2} - u_{\lambda_1}) + (u_{\lambda_3} - u_{\lambda_2}) + \cdots$$

è pure equiconvergente in generale entro S e vi rappresenterà sempre la medesima funzione $f(x, y, z)$, giacchè la serie (11) non è altro che la (8) alla quale è stata applicata la proprietà associativa. Esaminando, dunque, le due serie (10) e (11) noi possiamo affermare che esiste una serie di numeri interi e positivi crescenti $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots$ tali che le serie

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sum_1^{\lambda'_1} {}_i\, A_i\, p_i + \sum_{\lambda'_1+1}^{\lambda'_2} {}_i\, A_i\, p_i + \sum_{\lambda'_2+1}^{\lambda'_3} {}_i\, A_i\, p_i + \cdots, \\ \sum_1^{\lambda'_1} {}_i\, A_i\, p_i\, k_i^2\, e^{-\kappa k_i t} + \sum_{\lambda'_1+1}^{\lambda'_2} {}_i\, A_i\, p_i\, k_i^2\, e^{-\kappa k_i t} + \sum_{\lambda'_2+1}^{\lambda'_3} {}_i\, A_i\, p_i\, k_i^2\, e^{-\kappa k_i t} + \cdots \end{array} \right.$$

sono equiconvergenti in generale nel campo S e la prima serie ha per somma $f(x, y, z)$. Ciò che importa di notare è che nelle due serie l'aggruppamento dei teoremi corrisponde agli *stessi valori degli indici* $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots$

6. In modo anologo, partendo dalla disuguaglianza

$$k_i^2\, e^{-\kappa k_i t} < 1$$

e dalla successione

$$w'_i = \sum_{\lambda'_{i-1}+1}^{\lambda'_i} {}_r\, A_r\, p_r\, k_r\, e^{-\kappa k_r t},$$

dove $\lambda'_1, \lambda'_2, \lambda'_3, \dots$ sono gli *stessi* indici che figurano nelle serie (12), e posto

$$\psi'_j = \sum_1^j {}_i\, w'_i, \qquad (j = 1, 2, 3, \dots)$$

si proverebbe la *convergenza in media* della successione delle ψ'_j e quindi la esistenza, a norma del teorema di Weyl, di infiniti numeri interi e positivi crescenti $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ tali che la serie

$$\psi'_{\mu_1} + (\psi'_{\mu_2} - \psi'_{\mu_1}) + (\psi'_{\mu_3} - \psi'_{\mu_2}) + \cdots$$

risulti equiconvergente in generale nel campo S. Ma allora, valendosi della proprietà associativa per le serie (12), si può concludere che esiste una serie di numeri interi e positivi crescenti $\mu'_1, \mu'_2, \mu'_3, \ldots$ tali che le tre serie

$$\begin{cases} \sum_1^{\mu'_1} {}_i \mathrm{A}_i p_i + \sum_{\mu'_1+1}^{\mu'_2} {}_i \mathrm{A}_i p_i + \cdots \\ \sum_1^{\mu'_1} {}_i \mathrm{A}_i p_i k_i^2 e^{-\mathrm{K} k_i t} + \sum_{\mu'_1+1}^{\mu'_2} {}_i \mathrm{A}_i p_i k_i^2 e^{-\mathrm{K} k_i t} + \cdots, \\ \sum_1^{\mu'_1} {}_i \mathrm{A}_i p_i k_i e^{-\mathrm{K} k_i t} + \sum_{\mu'_1+1}^{\mu'_2} {}_i \mathrm{A}_i p_i k_i e^{-\mathrm{K} k_i t} + \cdots, \end{cases}$$

convergono in egual grado generalmente in S e che la prima rappresenta la funzione $f(x, y, z)$ in quel campo.

Finalmente, sempre con lo stesso metodo, e partendo dagli indici μ'_1, $\mu'_2, \mu'_3, \ldots$, si proverebbe che esiste una serie di numeri positivi crescenti indefinitamente $\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3, \ldots$ tali che le quattro serie

$$(13)\quad \begin{cases} \sum_1^{\nu'_1} {}_i \mathrm{A}_i p_i + \sum_{\nu'_1+1}^{\nu'_2} {}_i \mathrm{A}_i p_i + \cdots, \\ \sum_1^{\nu'_1} {}_i \mathrm{A}_i p_i k_i^2 e^{-\mathrm{K} k_i t} + \sum_{\nu'_1+1}^{\nu'_2} {}_i \mathrm{A}_i p_i k_i^2 e^{-\mathrm{K} k_i t} + \cdots \\ \sum_1^{\nu'_1} {}_i \mathrm{A}_i p_i k_i e^{-\mathrm{K} k_i t} + \sum_{\nu'_1+1}^{\nu'_2} {}_i \mathrm{A}_i p_i k_i e^{-\mathrm{K} k_i t} + \cdots, \\ \sum_1^{\nu'_1} {}_i \mathrm{A}_i p_i e^{-\mathrm{K} k_i t} + \sum_{\nu'_1+1}^{\nu'_2} {}_i \mathrm{A}_i p_i e^{-\mathrm{K} k_i t} + \cdots, \end{cases}$$

sono equiconvergenti in generale dappertutto nel campo S e che la prima serie ha ivi per somma $f(x, y, z)$.

7. Dalla dimostrata uniforme convergenza in generale delle serie (13) segue che a quelle serie è applicabile il teorema di integrazione per serie, tanto nel campo S quanto sul contorno σ. Si possono quindi ripetere, senza alcuna modificazione, i ragionamenti contenuti nei §§ 38 e 39 della citata Memoria (della Società italiana delle Scienze) del prof. Lauricella e dai quali risulta che la funzione V. definita dall'ultima serie (13), risolve completamente il problema del raffreddamento, nel supposto che *la temperatura iniziale $f(x, y, z)$ soddisfi alla sola condizione di avere le derivate prime finite nei punti dell'interno di* S *e le derivate normali, nei punti di σ, soddisfacenti all'equazione $\frac{df}{dn} = hf$.*