ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

preso nel senso del Lebesgue (o del Riemann), ed esteso alla poligonale e riferito ad una rappresentazione di questa in funzione della lunghezza dell'arco.

L'Osgood (1) ha dimostrato che, al tendere a zero del massimo lato della poligonale, tale integrale tende a quello di Weierstrass $W_c(F)$, esteso alla C, quando quest'ultimo esiste. E poichè l'esistenza di $W_c(F)$ è già stata da noi dimostrata, abbiamo, per il risultato del n. precedente, che *al tendere a zero del massimo lato della poligonale* P, *inscritta nella curva, l'integrale* (2) *della* F, *esteso a questa poligonale, tende a quello*

$$\int_c F(x, y, x', y')\, ds$$

esteso alla curva C.

Matematica. — *Sulle superficie algebriche contenenti due fasci ellittici di curve.* Nota di Ruggiero Torelli, presentata dal Corrisp. F. Severi.

In questa Nota dimostro, con semplici considerazioni geometriche, i seguenti due teoremi:

I. *Se una superficie possiede* due *fasci ellittici di curve irriducibili, i quali sieno in corrispondenza unirazionale fra loro, essa ne possiede* infiniti.

Il teorema si estende alle varietà superiori.

II. *Se una curva di genere* >1 *possiede* due *involuzioni ellittiche non composte, le quali sieno in corrispondenza unirazionale fra loro, essa ne possiede* infinite.

Aggiungo poi alcune semplici osservazioni in proposito; in un prossimo lavoro tornerò sull'argomento.

1. Sia F una superficie contenente due fasci ellittici Σ, Σ' di curve C, C', non composti con uno stesso fascio; e supponiamo che Σ, Σ' siano birazionalmente identici.

La geometria su una curva ellittica ci insegna (2) che si possono (in infiniti modi) determinare 2 o 4 o 6 (secondo che gli enti ellittici Σ, Σ' siano non singolari, armonici o equianarmonici) corrispondenze birazionali T_i ($i = 1, 2$ o $1, \ldots, 4$ o $1, \ldots, 6$) fra Σ, Σ', tali che ogni corrispondenza birazionale esistente fra Σ, Σ' sia prodotto di una T_i per una corrispondenza

(1) loc. cit., pag 293.

(2) Cfr. Segre, *Le corrispondenze univoche sulle curve ellittiche* [Atti Acc. Torino, vol. XXIV (1889)].

di 1ª specie di Σ' in sè. Talchè, detta ω una, variabile, di queste ultime corrispondenze, tutte le corrispondenze fra Σ, Σ' si ripartiscono in 2 o 4 o 6 sistemi $T_i\omega$, biraz. identici a Σ, Σ'; due sistemi diversi non hanno mai una corrisp. a comune; due corrisp. di uno stesso sistema non hanno mai a comune una coppia di elementi omologhi.

Orbene, si consideri una coppia variabile di curve C, C' omologhe in una corrisp. $T_i\omega$; esse si incontrano in un gruppo di punti che descrive una curva (eventualmente riducibile) $K_{i\omega}$. *Questa, al variar di* ω, *descrive un fascio* S_i *bir. identico a* Σ, Σ': poichè, se ω' è un'altra corrisp. di prima specie di Σ' in sè, le corrisp. $T_i\omega$, $T_i\omega'$ non hanno coppie comuni, e quindi le curve $K_{i\omega}$, $K_{i\omega'}$ non hanno punti comuni.

Il fascio S_i *e* Σ (o Σ') *non possono evidentemente essere composti con uno stesso fascio*: ma vediamo anche facilmente che *lo stesso può dirsi dei due fasci* $S_i, S_{i'}$. Se infatti esistesse un fascio di curve γ, ognuna delle quali fondamentale per S_i e per $S_{i'}$, la generica γ (non sarebbe certo fondamentale per Σ nè per Σ' e) sarebbe parte di una $K_{i\omega}$ e di una $K_{i'\omega'}$ $(\omega \neq \omega')$; ma allora le infinite coppie di curve C, C' uscenti dai suoi punti sarebbero omologhe nella $T_i\omega$ e nella $T_{i'}\omega'$, che perciò coinciderebbero: il che è assurdo.

Riassumendo: *i due fasci* Σ, Σ' *generano, nel modo suesposto, altri 2 o 4 o 6* NUOVI *fasci* S_i, *bir. identici a* Σ, Σ'.

2. Nelle considerazioni precedenti non si esclude che uno o ciascuno dei fasci Σ, Σ' sia composto. Ma allora prendiamo entro Σ, Σ' due involuzioni ellittiche I, I', bir. identiche fra loro (e ciò si può in infiniti modi [1]): anche i fasci I, I' genereranno a lor volta 2 o 4 o 6 fasci ellittici.

Ora domandiamoci: un fascio Φ, generato da una coppia di involuzioni I, I', e un fascio Φ_1, generato da un'altra coppia I_1, I_1', possono essere composti con uno stesso fascio? È assai agevole riconoscere quando ciò avviene; ma per brevità io qui mi limiterò a dimostrare che *alla precedente domanda va risposto negativamente, se una delle involuzioni* I, I' *e una delle* I_1, I_1' *sono di 1° ordine* [2]. E per questo, analogamente a quanto si è fatto in fine del n. 1, basterà mostrare che non può esistere una curva γ, non fondamentale per Σ, faciente parte di una curva, K, di Φ e di una, K_1, di Φ_1. Ed infatti la curva K sarà generata, nel modo esposto al n. 1, da una corrispondenza biunivoca fre I, I', la quale può, per l'ipotesi fatta, riguardarsi come una corrispondenza unirazionale Θ fra Σ, Σ'; e similmente la K_1 sarà generata da un'altra corrisp. unirazionale Θ_1 fra Σ, Σ'. Ora, se

[1] Cfr. Castelnuovo, *Geometria sulle curve ellittiche* [Atti Acc. Torino, vol. XXIV (1889)].

[2] Sono costituite cioè dai singoli elementi degli enti sostegni Σ o Σ'. Con questa limitazione della ricerca non vediamo quali siano *tutti* i fasci deducibili, col nostro metodo, da Σ, Σ': ma ciò, per dimostrare i teoremi enunciati in prefazione, non importa.

esistesse la suddetta curva γ, le infinite coppie di curve C, C' uscenti dai suoi punti sarebbero omologhe sia in Θ che in Θ_1: il che è assurdo, poichè le corrisp. Θ, Θ_1 sono *irriducibili*. Ciò prova l'asserto.

Poichè in Σ (e in Σ') esistono, notoriamente (1), infinite involuzioni bir. identiche a Σ, Σ', quanto abbiamo or ora dimostrato basta già a farci conchiudere che: *su una superficie* F *contenente due fasci ellittici bir. identici, non composti con uno stesso, esistono infiniti fasci eltittici irriducibili.*

Dalle considerazioni svolte discende subito il teorema I della prefazione.

3. L'estensione del teorema I a una varietà ∞^k ($k > 2$) può farsi con semplici cambiamenti di parole. Ma si può pure, come mi ha fatto rilevare il prof. Severi, procedere, più elegantemente, così. Se una varietà ∞^k, V_k, possiede due fasci ellittici irriducibili Σ, Σ' di varietà ∞^{k-1}, V, V', prese due curve ellittiche Γ, Γ' bir. identiche a Σ, Σ', la V_k risulta in corrispondenza unirazionale colla superficie F delle coppie di punti di Γ, Γ'; ai punti di F corrispondendo le V_{k-2} comuni a una V e a una V'. Ora, se Σ, Σ' si possono mettere in corrispondenza unirazionale fra loro, F contiene, per il teorema I, infiniti fasci ellittici irriducibili di curve; quindi la V_k conterrà infiniti fasci ellittici irriducibili di V_{k-1}, c. d. d.

4. Per dimostrare il teorema II premettiamo tre lemmi, la cui dimostrazione, immediata dal punto di vista trascendente, può pure condursi per via geometrica nel seguente modo.

a) Se una curva C (di genere > 1) possiede una involuzione ellittica I, la varietà V_i delle i-ple ($i > 1$) di punti di C possiede un fascio Σ di V_{i-1}, bir. identico a I. Si prenda infatti nell'ente ∞^1 I una g_i^{i-1}; e in ciascuno dei gruppi di I che formano un gruppo variabile di tal g_i^{i-1} si prenda arbitrariamente un punto. Si ottengono così un certo numero di gruppi di i punti, e tali gruppi variano in una serie ∞^{i-1}, ossia in una V_{i-1} di V_i. Al variare della suddetta g_i^{i-1}, tal V_{i-1} descrive il fascio Σ, di cui parla l'enunciato.

b) Inversamente: se V_i contiene un fascio ellittico Σ di V_{i-1}, questo può imaginarsi ottenuto, nel modo anzidetto, da una certa involuzione ellittica I di C. Preso infatti su C un gruppo di $i-1$ punti, i residui di esso rispetto alla serie imagine di una V_{i-1} variabile di Σ costituiscono un gruppo, che descrive appunto, com'è facile vedere, la involnzione I di cui parla l'enunciato.

Infine si può vedere, con considerazioni semplicissime, che:

c) Se l'involuzione I è composta, il fascio Σ è riducibile; e viceversa.

Dopo ciò, dal teorema I e dai precedenti lemmi *a*), *b*), *c*) discende senz'altro il teorema II della prefazione.

(1) Cfr. Castelnuovo, loc. cit.

Osserverò che *il teorema II potrebbe anche dimostrarsi costruendo sulla curva* C *le infinite involuzioni di cui esso parla, con l'identico metodo da noi usato pei fasci su una superficie.* Non entro qui in dettagli, per mancanza di spazio.

5. Il prof. Severi, cui comunicai le presenti considerazioni, mi fece anche rilevare una semplicissima dimostrazione trascendente del teorema I, enunciato per una varietà V_k, di dimensione qualunque $k \geqq 1$. Eccola.

Se V_k possiede due fasci (involuzioni, per $k = 1$) ellittici bir. identici, non composti con uno stesso, questi daranno luogo a due integrali semplici di 1ª specie, u, v, di V_k, riducibili a integrali ellittici. Riducendo a forma normale i loro periodi, si otterrà la tabella:

	1	0	τ	0
v	0	1	0	τ

e quindi ogni integrale del tipo $\lambda u + \mu v$, con λ, μ intieri non nulli, sarà anche riducibile a ellittico: poichè i suoi periodi si esprimono come combinazioni lineari a coefficienti intieri di $1, \tau$. Ne viene che le varietà $\lambda u + \mu v = \text{cost.}$ sono algebriche, e costituiscono un fascio ellittico: diciamo Σ'' questo fascio, se irriducibile, o, se no, il fascio irriducibile con cui esso è composto. Si ottengono così, al variare di λ, μ, infiniti fasci irriducibili distinti fra loro e da Σ, Σ': poichè se, per es., Σ'' coincidesse con Σ', dovrebbero $\lambda u + \mu v$ e v differire per un fattore costante, e quindi sarebbe $\lambda = 0$ (1).

6. A complemento dei teoremi dimostrati aggiungiamo quanto segue.

Se una varietà V_k ($k \geqq 1$) possiede due fasci ellittici Σ, Σ' di varietà V_{k-1}, V'_{k-1}, non composti con uno stesso, *ed essi* NON *si possono mettere in corrispondenza unirazionale fra loro*, qualunque corrispondenza algebrica fra Σ, Σ' sarà a valenza zero. (2).

Ne segue, se $k > 1$, che: *presa comunque una curva* γ *di* V_k, *non fondamenatale per* Σ, *nè per* Σ', *l'insieme delle* V'_{k-1} (σV_{k-1}) *passanti pei punti in cui* γ *incontra una* V_{k-1} ($\sigma V'_{k-1}$) *variabile, varia in un sistema lineare.*

E, se $k = 1$, che: *l'insieme dei gruppi dell'involuzione* Σ (*o* Σ') *uscenti dai punti di un gruppo variabile di* Σ' (*o* Σ), *varia in una serie lineare; epperò* (3) *le due involuzioni hanno*

$$nn' + 1 - P$$

(1) Pel caso in cui V_k sia una curva di genere due, cfr. Krazer, *Lehrbuch der Thetafunktionen* [Teubner, 1903], pag. 489.

(2) Cfr. Castelnuovo, loc. cit., n. 17.

(3) Cfr. Amodeo, *Contribuzione alla teoria delle serie irrazionali*, etc. [Ann. di Mat., s. 2, t. XX], n. 17.

coppie comuni: n, n' indicando i loro ordini, p il genere della curva sostegno.

7. Terminerò con una osservazione. Nella costruzione di tutti i fasci ellittici esistenti su una V_k che ne contenga 2, bir. identici, si presenta la questione: *quali sono su una curva ellittica* C *le involuzioni bir. identiche a essa?* Si sa che per ogni valore dell'intiero n ne esiste una, H_{n^2}, di ordine n^2, la quale è costituita dai gruppi dei punti n-pli (pensati ciascuno una volta) delle g_n^{n-1} di C. Orbene: io dimostrerò che *se su* C *esistono solo corrispondenze a valenza* (*e solo allora*) *le dette* H_{n^2} *sono le sole involuzioni bir. identiche a* C. Sia infatti I_m una involuzione di ordine m, bir. identica a C; e fissiamo una corrisp. biunivoca fra C e I_m: essa può riguardarsi come una corrispondenza T, di indici $1, m$, fra i punti di C;, e come tale avrà, per ipotesi, una certa valenza $\nu \gtrless 0$. Poniamo $n = |\nu|$; diciamo P, P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ punti di C; G, G_i i loro gruppi omologhi; sarà:

$$\nu P + G \equiv \nu P_i + G_i . \tag{1}$$

Fissati ora P e G, esistono $n^2 - 1$ (e solo $n^2 - 1$) punti P_i tali che:

$$nP \equiv nP_i ; \tag{2}$$

ed esistono [1] $m - 1$ (e solo $m - 1$) gruppi G_i, tali che

$$G \equiv G_i . \tag{3}$$

Poichè le relazioni (2) e (3) sono, in virtù della (1), fra loro equivalenti, segue $m = n^2$. Se poi sono $A_1 A_2 \ldots A_{n^2}$ i punti di G, si ha (considerando la T^{-1}):

$$\nu A_1 + P \equiv \nu A_2 + P \equiv \cdots \equiv \nu A_{n^2} + P ,$$

quindi anche:

$$n A_1 \equiv n A_2 \equiv \cdots \equiv n A_{n^2} :$$

ma dunque la I_m coincide colla H_{n^2}, c. d. d.

Se C possiede corrisp singolari (per es. se è armonica o equianarmonica), esistono, oltre le dette H_{n^2}, altre involuzioni bir. identiche a C: come può facilmente dimostrarsi per via trascendente [2].

[1] Cfr. per es. la mia Nota *Sulle curve di genere due* ecc. [Rend. Soc. Reale di Napoli, 1911], n. 1.

[2] Per un esempio cfr. Severi, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica* ecc. [Mem. Acc. Torino, t. LIV (1904)], n. 24. Cfr. anche Segre, loc. cit.