ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sopra le deformazioni continue delle superficie reali applicabili sul paraboloide a parametro puramente immaginario.* Nota di L. P. EISENHART, presentata dal Socio L. BIANCHI.

In una recente Memoria (¹) il prof. Bianchi ha portato un importante contributo alla teoria delle superficie a curvatura costante negativa stabilendo l'esistenza di una nuova classe di deformazioni continue di tali superficie e mostrando che un sistema, il quale consiste di ∞^1 di queste deformate, possiede delle trasformazioni di Bäcklund in sistemi della stessa specie, affatto analogamente come i sistemi di Weingarten di superficie pseudosferiche. In seguito (²) egli sviluppò una teoria simile per superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica. È noto (³) che, quando si applica il metodo di Weingarten ad una superficie pseudosferica in geometria ellittica, si ottiene per quadrature una superficie nello spazio euclideo, che è applicabile sul paraboloide

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} + 2iz = 0 \tag{1}$$

con parametro puramente immaginario. L'A. ha dimostrato che questa trasformazione ottenuta col metodo di Weingarten può essere estesa in modo da venire applicata alle superficie di un sistema (Σ) in geometria ellittica, quale è stato definito dal prof. Bianchi nella sua Memoria B, e con questo mezzo egli ha stabilito l'esistenza di un'analoga teoria di trasformazioni continue di superficie applicabili sul paraboloide (1). In questa Nota verranno esposti soltanto i resultati di questa ricerca. Anzitutto noi richiamiamo alcune formule dalla Memoria B.

Sia S una superficie pseudosferica di curvatura assoluta K e di curvatura relativa $-\frac{1}{a^2}$, riferita ad un sistema ortogonale (u, v), per cui il suo elemento lineare prende la forma

$$ds^2 = e\,du^2 + g\,dv^2 . \tag{2}$$

Riferendo i punti dello spazio ellittico ad un sistema di coordinate di

(¹) *Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche.* Annali di Matematica, serie III, tomo XVIII (1911), pag. 1 e sgg.

(²) *Sopra le deformazioni isogonali delle superficie a curvatura costante in geometria ellittica ed iperbolica.* Annali, serie III, tomo XVIII (1911). pag. 185 e sgg.

(³) *Ricerche sulla deformazione delle quadriche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XXII (1906), pag. 3.

Weierstrass, noi indichiamo con x_0, x_1, x_2, x_3 le coordinate di un punto $F \equiv (u, v)$ mobile su S, e rappresentiamo con

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\ ,\ (\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)\ ,\ (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

i coseni di direzione delle tangenti alle curve $v = \text{cost}$, $u = \text{cost}$ su S e della normale ad S in F; questi sono cioè le coordinate di Weierstrass dei piani del triedro parametrico. I coseni di direzione di una retta per F_1 che formi l'angolo costante α col piano tangente hanno la forma

$$(3)\qquad \xi'_i = \cos\alpha \operatorname{sen}\varphi\,.\,\eta_i - \cos\alpha\cos\varphi\,\zeta_i + \operatorname{sen}\alpha\,\xi_i\,,\qquad (i = v, 1, 2, 3),$$

dove $\varphi(u, v)$ indica l'angolo che la normale a questa linea, giacente nel piano tangente, forma colla tangente alla curva $v = \text{cost}$. È dimostrato che la condizione necessaria e sufficiente affinchè la S ammetta una deformazione infinitesima per la quale il punto F sia spostato nella direzione (3) della distanza εh, dove ε è una costante infinitesima, è che h e φ soddisfacciano le equazioni differenziali

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{e}\left\{\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right) + \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\log h}{\partial v}\right\} - \\ &-\sqrt{g}\left\{\operatorname{sen}\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right) - \cos\varphi\frac{\partial\log h}{\partial u}\right\} + 2\cot\tau\sqrt{eg} = 0 \\ &\frac{\partial\log h}{\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right) - \frac{\partial\log h}{\partial u}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{1}{\sqrt{e}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial u}\right) = k\sqrt{eg}\,. \end{aligned}\right.$$

Inoltre, queste funzioni stanno nelle relazioni seguenti coi secondi coefficienti fondamentali D, D', D'' di S:

$$(5)\qquad D = \sqrt{e}\cot\alpha\left\{\cos\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{e}}{\partial v}\right) + \operatorname{sen}\varphi\frac{\partial\log h}{\partial u}\right\}$$

e si hanno espressioni simili per D' e D''; queste espressioni soddisfanno le equazioni di Codazzi e di Gauss in virtù delle (4).

Per di più la linea nel piano tangente ad S in F, la quale è perpendicolare alla direzione (3), definisce una trasformazione di Bäcklund di S in una superficie S′, la cui normale nel punto di contatto F ha la direzione (3), e le cui coordinate sono date da

$$(6)\qquad x'_i = \cos\tau\,.\,x_i + \operatorname{sen}\tau(\eta_i\cos\varphi + \zeta_i\operatorname{sen}\varphi)\quad (i = 0, 1, 2, 3)\,.$$

Affinchè la deformazione sia continua, le funzioni D, D', D''; h, φ; x, η, ζ, ξ debbono contenere un parametro w, tale che sussistano le equazioni

$$(7)\qquad \frac{\partial x_i}{\partial u} = \sqrt{e}\,\eta_i\ ,\ \frac{\partial x_i}{\partial u} = \sqrt{g}\,\zeta_i\ ,\ \frac{\partial x_i}{\partial w} = h\xi'_i\quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

La condizione necessaria e sufficiente a ciò è che, oltre alle equazioni (4), siano soddisfatte anche le seguenti

$$(8)\quad \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial \Delta}{\partial w} = h_{11} + keh \,,\ \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial \Delta'}{\partial w} = h_{12} + kfh \,,\ \operatorname{sen}\alpha \frac{\partial \Delta''}{\partial w} = h_{22} + kgh,$$

che sono scritte in forma invariantiva. Quando queste condizioni sono soddisfatte, le equazioni (7) definiscono un sistema triplo di superficie in geometria ellittica tale che ciascuna delle superficie $w = \text{cost}$ è una deformata continua delle altre. Noi diciamo che le equazioni (7) definiscono *un sistema di Bianchi*. Nello stesso tempo le equazioni (6) definiscono un secondo sistema di Bianchi, che noi chiamiamo *il sistema coniugato*. Questa relazione è reciproca, cioè il sistema (7) è il coniugato del sistema ottenuto per mezzo della (6) [1].

Quando il metodo di Weingarten viene applicato ad una superficie pseudosferica S in geometria ellittica, si trova una superficie reale Σ nello spazio euclideo, le cui coordinate sono date da

$$(9)\qquad dy_i = x_i\, dx_0 + a^2 \xi_i\, d\xi_0 \quad (i = 1\,,2\,,3)\,,$$

la quale è applicabile sul paraboloide (1), come si dimostra ponendo

$$x = x_0 \;,\; y = a^2 \xi_0 \;,\; z = i\,\frac{x_0^2 + a^2 \xi_0^2}{2}\,.$$

Noi diciamo che le equazioni (9) definiscono un *trasformazione W*. I coseni di direzione della normale a Σ sono proporzionali alle quantità A_i definite da

$$(10)\qquad A_i = \zeta_i \eta_0 - \eta_i \zeta_0$$

Sarà necessario definire due altre funzioni β e γ come segue

$$(11)\qquad \begin{aligned} \beta &= -\operatorname{sen}\tau\, x_0 + \cos\tau(\cos\varphi\, \eta_0 + \operatorname{sen}\varphi\, \zeta_0) \\ \gamma &= \frac{\operatorname{sen}\tau}{a}\, \xi_0 - \operatorname{sen}\alpha(\operatorname{sen}\varphi\, \eta_0 - \cos\varphi\, \zeta_0) \end{aligned}$$

Coll'aiuto di queste noi stabiliamo il teorema:

Se Σ è la trasformata W *d'una superficie* S, *la superficie Σ' le cui coordinate sono date da*

$$(12)\qquad y'_i = y_i + \operatorname{sen}\tau(\beta x_i - a\gamma\xi_i)$$

è la trasformata W *della superficie* S' *che origina da* S *mediante la trasformazione di Bäcklund determinata dalle stesse funzioni α, τ, h, φ; e le superficie Σ e Σ' sono le superficie focali d'una congruenza* W.

Affine di giungere a questo risultato noi effettuiamo un cambiamento di parametri per S' cosicchè i piani del triedro parametrico debbono avere

[1] Il prof. Bianchi dice che in questo caso il secondo sistema è ottenuto dal primo con una *trasformazione singolare*.

una orientazione conveniente. Il carattere di questa scelta verrà spiegato in seguito.

Quando noi consideriamo non una superficie isolata S, ma un sistema di Bianchi, noi troviamo che esiste una trasformazione W generalizzata, tale che le superficie trasformate Σ sono trasformate continue l'una dell'altra. Questo risultato può essere espresso nel modo seguente:

Quando si ha un sistema di Bianchi di superficie pseudosferiche in geometria ellittica, determinato da un insieme di funzioni h, φ, τ *ed* α, *soddisfacenti le equazioni* (4), (5), (8), *e le funzioni* A'_i *per il sistema coniugato di Bianchi sono determinate concordemente colla corrispondente affinità di Ivory le equazioni*

$$dy_i = x_i\, dx_0 + a^2 \xi_i\, d\xi_0 - ah \operatorname{sen} \alpha\, A'_i\, dw \tag{13}$$

sussistono e definiscono nello spazio euclideo un sistema di superficie $\Sigma(w = \text{cost})$, *le quali sono deformate continue l'una dell'altra, e ciascuna superficie* Σ *è applicabile sul paraboloide* (1); *inoltre, le superficie* Σ' *definite da* (12) *formano un secondo sistema della medesima specie.*

Noi denominiamo questo secondo sistema il coniugato del primo.

Quando nelle equazioni (6) le quantità α, h, φ, τ sono sostituite da un secondo gruppo $\alpha_1, h_1, \varphi_1, \tau_1$ soddisfacente le equazioni (4), (5), (8), queste equazioni definiscono una nuova trasformazione β_α delle superficie S. Inoltre, come il prof. Bianchi ha dimostrato, le trasformate S' formano un sistema di Bianchi. Noi abbiamo stabilito gli analoghi risultati:

Quando si applica al sistema (13) *di superficie* Σ *una trasformazione definita da equazioni del tipo* (12), *nel quale* α, h, φ, τ *sono sostituite da* $\alpha_1, h_1, \varphi_1, \tau_1$, *le superficie risultanti* Σ' *sono tali che ciascun gruppo di superficie corrispondenti* $\Sigma, \Sigma', \bar{\Sigma}, \bar{\Sigma}'$ *formano una quaterna in accordo con un teorema di permutabilità per trasformazioni* (13).

Per queste trasformazioni generali e per la singolare pertinente al sistema coniugato, le coordinate y'_i soddisfano equazioni della forma

$$dy'_i = x'_i\, dx'_0 + a^2 \xi'_i\, d\xi'_0 - ah' \operatorname{sen} \alpha\, \bar{A}_i\, dw \tag{14}$$

dove x' e ξ' sono dati dalle corrispondenti equazioni (6), (3), la funzione h'^2 è il coefficiente di dw^2 nella espressione per l'elemento lineare del sistema (S') e le funzioni $\bar{A}_i$ appartengono al sistema coniugato di superficie e sono determinate dalla corrispondente affinità di Ivory.

In aggiunta a queste trasformazioni dei sistemi di Bianchi, il professore Bianchi ha stabilito anche una trasformazione complementare ottenuta conducendo le tangenti ad un sistema di geodetiche ortogonali ad una famiglia di oricicli. Per queste trasformazioni un sistema di Bianchi è cangiato in un nuovo sistema della medesima specie. Per queste trasformazioni abbiamo anche un teorema analogo all'ultimo, ma in questo caso la determinazione delle funzioni $\bar{A}_i$ richiede quadrature. Particolare interesse ha il caso di $k = 0$, vale a dire quando le superficie S sono applicabili sulla superficie di Clifford.

Nello spazio euclideo le superficie Σ sono applicabili sul paraboloide di rotazione

$$x^2 + y^2 + 2z = 0 \tag{15}$$

e conseguentemente ciascuna è una falda focale di una superficie del tipo scoperto da Weingarten nel 1861.

Ricordiamo che Darboux ha dimostrato che la superficie media è una superficie di traslazione, con curve generatrici a torsione costante eguale e di segno contrario, e che i piani osculatori di queste curve s'intersecano nelle normali corrispondenti alle superficie di Weingarten. Noi abbiamo stabilito il risultato seguente:

La condizione necessaria e sufficiente perchè la trasformazione (12) *di una superficie* Σ *sia complementare, è che* Σ *sia applicabile sul paraboloide* (15) *è che la corrispondente trasformazione di* S *in geometria ellittica sia complementare; un sistema di Bianchi di superficie applicabili sopra la superficie di Clifford corrisponde per trasformazione* W *ad un sistema di superficie* Σ *applicabili sul paraboloide* (15); *l'ultimo sistema ammette una trasformazione complementare in sistemi della medesima specie, in modo che ciascuna coppia di superficie* Σ, Σ' *sono le superficie focali di superficie di Weingarten.*

L'autore ha stabilito con metodo diretto l'esistenza di sistemi di deformazioni continue del paraboloide reale, e si occupa ora di ricerche analoghe concernenti le superficie applicabili nelle quadriche a centro.

Fisica. — *Sulla costante di trasformazione del Radio D* (¹). Nota del dott. Paolo Rossi, presentata dal Corrisp. M. Cantone.

Il Radio D non si mostra radioattivo per sè stesso, ma si sa che, una volta raggiunto l'equilibrio radioattivo dei suoi prodotti di trasformazione, tanto l'attività dei raggi β quanto quella dei raggi α — dovute rispettivamente al Radio E ed F — devono decrescere colla stessa legge esponenziale e precisamente con quella che caratterizza la trasformazione del Radio D (²). Siccome però questa avviene molto lentamente, così finora si preferito dai diversi autori di determinarne il periodo con metodi indiretti

(¹) Lavoro eseguito nella R. Università di Napoli.
(²) M.me Curie, *Radioactivité*, tom. II, pag. 373.