ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 21 aprile 1912.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Della trasformazione delle forme differenziali quadratiche.* Nota del Corrisp. G. Ricci.

La determinazione degli invarianti differenziali assoluti proprii delle quadriche differenziali è problema di fondamentale importanza per lo studio delle loro trasformazioni e per quello delle proprietà intrinseche delle varietà. Esso fu completamente risoluto da Casorati [1] per quanto risguarda le forme binarie e nel caso generale fu ricondotto per merito di Christoffel [2] al problema puramente algebrico della determinazione degli invarianti comuni alla quadrica data, alla forma quadrilineare covariante di Riemann da essa dedotta, ed a quelle che se ne traggono con successive derivazioni covarianti.

Nella presente Nota applico il metodo da me esposto in un recente studio [3] alla determinazione degli invarianti comuni alla quadrica fondamentale ed alla forma quadrilineare di Riemann ad essa relativa; ed ottengo così un sistema completo di invarianti differenziali di 2° ordine. Lo stesso metodo potrebbe estendersi senza modificazioni essenziali alla risoluzione dello stesso problema per quanto risguarda gli invarianti differenziali di un ordine qualunque.

(1) *Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve.* Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da B. Tortolini, tomi III e IV.

(2) *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades.* Borchardt's Journal 70ᵉʳ Band.

(3) *Di un metodo per la determinazione di un sistema completo di invarianti per un dato sistema di forme*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Tomo XXXVIII.

1. Sia una varietà V_n rappresentata intrinsecamente dalla quadrica differenziale

$$\varphi = \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

e sia

$$F = \Sigma_{rstu}\, a_{rt,su}\, dx_r\, dx_s\, \delta x_t\, \delta x_u$$

la forma quadrilineare di Riemann ad essa spettante.

Le relazioni lineari, che legano fra di loro i coefficienti di F si riassumono (¹) nelle

$$a_{rt,su} = -\, a_{tr,su} = -\, a_{rt,us} \tag{1}$$

$$a_{rt,su} + a_{ru,ts} + a_{rs,ut} = 0\,; \tag{2}$$

per esse il numero dei coefficienti stessi linearmente indipendenti scende a

$$N = \frac{n^2(n^2-1)}{12}\,.$$

Dalle (1) e (2) seguono poi le

$$a_{rt,su} = a_{su,rt}\,. \tag{3}$$

Si denotino con $a^{(rs)}$ i coefficienti della forma reciproca di φ, si ponga

$$\alpha_{rs} = \Sigma_{pq}\, a^{(pq)}\, a_{pr,qs} \tag{4}$$

e si consideri la forma

$$f = \Sigma_{rs}\, \alpha_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

covariante a φ e ad F.

Si suppongano tutte distinte le radici $\varrho_1\,, \varrho_2\,, \ldots, \varrho_n$ della equazione caratteristica

$$\|\alpha_{rs} - \varrho\, a_{rs}\| = 0\,.$$

Ciascuno degli n sistemi di equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_s(\alpha_{rs} - \varrho_i\, a_{rs})\, \lambda^{(s)} = 0 \\ \Sigma_{rs}\, a_{rs}\, \lambda^{(r)}\, \lambda^{(s)} = 1 \end{array}\right\} \quad (i = 1\,, 2\,, \ldots n)$$

ammette in tale ipotesi una soluzione determinata a meno del segno, per la quale, designando con $A_i^{(r)}$ $(r = 1\,, 2\,, \ldots n)$ delle opportune funzioni intiere di grado $n-1$ nella ϱ_i e posto

$$\mu_i^2 = \sum_{1}^{n}{}_{rs}\, a_{rs}\, A_i^{(r)}\, A_i^{(s)}\,, \tag{5}$$

(¹) Cfr. Ricci, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori*. Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 2° semestre 1910.

possiamo assumere

$$\lambda^{(r)} = \lambda_i^{(r)} = \frac{A_i^{(r)}}{\mu_i}. \tag{6}$$

Per $i = 1, 2, \ldots, n$ le $\lambda_i^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots n)$ costituiscono i sistemi coordinati controvarianti delle congruenze appartenenti alla ennupla principale (in questo caso unica e determinata) della V_n. Le radici $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ della equazione caratteristica sono poi gli invarianti principali della V_n stessa [1].

Si osservi ora che il numero degli invarianti assoluti indipendenti comuni alle forme φ ed F è

$$N + \frac{n(n+1)}{2} - n^2 = N - \frac{n(n-1)}{2};$$

e che esso risulta eguale ad n per $n = 3$, maggiore di n per $n > 3$. Perciò per $n = 3$ gli invarianti principali costituiscono un sistema completo di invarianti differenziali di 2° ordine per la forma φ. Nel caso di $n > 3$ il problema di determinare un tale sistema è invece ancora da risolvere.

Poniamo

$$\gamma_{ih,jk} = \Sigma_{rstu}\, a_{rt,su}\, \lambda_i^{(r)} \lambda_j^{(s)} \lambda_h^{(t)} \lambda_k^{(u)} \tag{7}$$

$$\gamma_{hk} = \Sigma_i\, \gamma_{ih,ik} \tag{8}$$

$$\lambda_{i/r} = \Sigma_s\, a_{rs}\, \lambda_i^{(s)}.$$

Dalle (1) e (2) seguono le

$$\gamma_{ih,jk} = -\gamma_{hi,jk} = -\gamma_{ih,kj} \tag{9}$$

$$\gamma_{ih,jk} + \gamma_{ik,hj} + \gamma_{ij,kh} = 0 \tag{10}$$

e quindi le

$$\gamma_{ih,jk} = \gamma_{jk,ih},$$

da cui le

$$\gamma_{hk} = \gamma_{kh}.$$

Le (7), il cui numero è eguale ad N, sono risolubili rispetto alle $a_{rt,su}$ equivalendo esse alle

$$a_{rt,su} = \Sigma_{ih,jk}\, \gamma_{ih,jk}\, \lambda_{i/r}\, \lambda_{j/s}\, \lambda_{h/t}\, \lambda_{k/u}, \tag{7'}$$

e però le $\gamma_{ih,jk}$ da esse definite considerate come funzioni delle $a_{rt,su}$ sono fra loro indipendenti.

Se si osserva di più che dalle (4) e (7') seguono le

$$a_{rs} = \Sigma_{hk}\, \gamma_{hk}\, \lambda_{h/r}\, \lambda_{k/s}$$

[1] Cfr. Ricci, *Direzioni ed invarianti principali di una varietà qualunque*. Atti del R. Istituto Veneto di Scienze Lettere ed Arti, tomo LXIII, pag. 1233.

e si ricorda che la sostituzione lineare

$$\begin{vmatrix} \lambda_{1/1} & \lambda_{1/2} & \dots & \lambda_{1/n} \\ \lambda_{2/1} & \lambda_{2/2} & \dots & \lambda_{2/n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \lambda_{n/1} & \lambda_{n/2} & \dots & \lambda_{n/n} \end{vmatrix}$$

riduce ad espressione canonica la forma f si stabiliscono le relazioni

(11) $$\Sigma_i \gamma_{ih,ih} = \varrho_h$$

(12) $$\Sigma_i \gamma_{ih,ik} = 0 \qquad (k \neq h);$$

di cui queste ultime, in numero di $\frac{n(n-1)}{2}$, legano fra di loro le $\gamma_{ih,jk}$. E poichè dalle (7), stante la natura controvariante delle $\lambda_i^{(r)}$, risulta che esse sono invarianti assoluti, si conclude che esse ci forniscono un sistema completo di invarianti assoluti comuni alle forme φ ed F.

2. Gli elementi di questo sistema non sono però fra loro indipendenti, poichè tra essi hanno luogo le relazioni (9), (10) e (12). Di più essi sono irrazionali nei coefficienti delle forme φ ed F, in quanto le loro espressioni contengono le $\lambda_i^{(r)}$, e queste per le (6) si esprimono per la radice ϱ_i della equazione caratteristica.

Si tratta ora di costruire colle $\gamma_{ih,jk}$ un sistema completo di invarianti razionali tutti fra' loro indipendenti, e però in numero di $N - \frac{n(n-1)}{2}$; il cui carattere invariantivo, appunto per la loro natura razionale, sarà indipendente dalla ipotesi restrittiva fatta sopra circa la natura della equazione caratteristica. I risultati, a cui giungeremo, varranno quindi per tutte le forme differenziali quadratiche definite.

Costruiremo perciò colle $\gamma_{ih,jk}$ delle funzioni razionali simmetriche delle radici della equazione caratteristica, e a questo intento gioverà osservare:

1°) che per le (5) e (6) sono razionali nelle $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ i quadrati delle $\gamma_{ih,jk}$ ed, in generale, tutti i loro prodotti nei quali ogni indice appaia un numero pari di volte;

2°) che sono simmetriche rispetto alle $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ tutte le funzioni delle $\gamma_{ih,jk}$ simmetriche rispetto agli indici $1, 2, \dots n$.

Premesso ciò, designamo con $(ihjk)$ una combinazione a quattro a quattro, anche con ripetizione, di questi indici e formiamo le funzioni elementari simmetriche dei tre invarianti $\gamma_{ih,jk}, \gamma_{ik,hj}, \gamma_{ij,kh}$. Osserviamo che per le (10) quella di 1° grado risulterà identicamente nulla, e designamo quelle di 2° e 3° grado rispettivamente con α_{ihjk} e β_{ihjk}; poniamo cioè

(13) $$\alpha_{ihjk} = \gamma_{ih,jk}\gamma_{ik,hj} + \gamma_{ih,jk}\gamma_{ij,kh} + \gamma_{ik,hj}\gamma_{ij,kh}$$

(14) $$\beta_{ihjk} = \gamma_{ih,jk}\gamma_{ik,hj}\gamma_{ij,kh}\,.$$

Per quanto fu sopra osservato le α_{ihjk} e la β^2_{ihjk} sono razionali nelle radici della equazione caratteristica; ed è poi facile riconoscere, avendo presenti le (9), che esse sono simmetriche rispetto agli indici i, h, j, k. Di più per le

(15) $$\gamma_{ii,jk} = \gamma_{ih,jj} = 0,$$

che seguono dalle (19), sono identicamente nulle le α_{ihjk}, che non abbiano almeno tre indici distinti, e le β_{ihjk}, nelle quali anche due soli indici coincidano. Essendo poi

$$\alpha_{ihik} = -\gamma^2_{ih,ik}$$

si riconosce che, designando in seguito con $(i\,h\,j\,k)$ una combinazione semplice qualunque della classe quarta degli indici $1, 2, \ldots, n$, al sistema di invarianti irrazionali $\gamma_{ih,jk}$, legati fra di loro dalle relazioni (9) (10) e (12), si può sostituire quello che risulta

A) delle $\gamma_{ih,ih}$ in numero di $n(n-1):2$

B) delle $\gamma^2_{ih,ik}$ in numero di $n(n-1)(n-2):2$

C) delle α_{ihjk} in numero di $n(n-1)(n-2)(n-3):24$

D) delle β^2_{ihjk} in numero di $n(n-1)(n-2)(n-3):24$.

Avremo così in tutto N invarianti razionali nelle radici della equazione caratteristica legati fra di loro dalle sole relazioni (12), le quali concernono soltanto gli invarianti del gruppo B e sono in numero di $n(n-1):2$, e sarà opportuno sostituire ad essi un sistema di $n(n-1)(n-3):2$ tutti invarianti fra loro indipendenti. Ciò si ottiene nel modo che segue.

Si osservi che alle $\gamma^2_{ih,ik}$ si possono sostituire le $\gamma_{ih,ih}$ combinate secondo i criterî già esposti, in modo da avere delle espressioni razionali nelle radici della equazione caratteristica. Si fissi ora una qualunque combinazione (hk), semplice e di seconda classe, degli indici $1, 2, 3, \ldots, n$ e delle $\gamma_{ih,ik}$, il cui numero per le (15) si riduce ad $n-2$, si costruiscano le funzioni simmetriche elementari. Per le (12) saranno identicamente nulle quelle di primo grado; per le rimanenti cioè per $m = 2, 3, \ldots n-2$ indichiamo con $B^{(m)}_{hk}$ quelle di grado m, cioè poniamo

$$B^{(2)}_{hk} = \sum_{(ij)} \gamma_{ih,ik}\,\gamma_{jh,jk}$$

$$B^{(3)}_{hk} = \sum_{(ijg)} \gamma_{ih,ik}\,\gamma_{jh,jk}\,\gamma_{gh,gk}$$

. . . .

intendendo le sommatorie estese a tutte le combinazioni semplici e rispettivamente delle classi $2^a, 3^a, \ldots$ degli indici $1, 2, \ldots n$. Con B_m designamo poi l'insieme delle $B_{hk}^{(m)}$ o quello dei loro quadrati, secondo che m è pari o dispari. Ciascuno dei gruppi B_m conterrà $n(n-1):2$ invarianti razionali nelle radici della equazione caratteristica, ed avremo così in tutto $n(n-1)(n-3):2$ invarianti tutti fra loro indipendenti, che potranno prendere il posto di quelli del gruppo B.

Riassumendo, gli invarianti appartenenti ai gruppi $A, C, D, B_2, B_3, \ldots B_{n-2}$, costituiranno, per la quadrica differenziale φ, un sistema completo e non esuberante di invarianti differenziali di 2° ordine, razionali nelle radici della equazione caratteristica. E se con essi costruiremo comunque altrettante funzioni intiere, tutte fra loro indipendenti e di più simmetriche rispetto agli indici $1, 2, \ldots, n$, avremo costruito un sistema completo di invarianti differenziali di 2° ordine per la quadrica differenziale φ, che potrà essere qualunque, purchè definita.

Nella effettiva costruzione di tali funzioni sarà tuttavia opportuno procedere separatamente per ciascuno dei sistemi parziali (tutti invarianti rispetto al gruppo simmetrico di grado n), nei quali il sistema completo degli invarianti irrazionali, precedentemente costruito, è risultato decomposto.

3. Per $n = 2$ abbiamo da considerare il solo gruppo A, che risulta del solo elemento $\gamma_{12,12}$, che è razionale nei coefficienti di φ e nelle loro derivate e coincide coll'invariante di Gauss.

Per $n = 3$ abbiamo ancora il solo gruppo A, costituito però in questo caso di tre elementi, che si possono fare corrispondere uno per uno ai tre indici $1, 2, 3$, e che coincidono cogli invarianti principali della varietà, la cui metrica è definita da φ. Il sistema completo degli invarianti razionali è dunque costituito dalle loro funzioni simmetriche elementari.

Per $n > 3$ si può ottenere un sistema completo di invarianti razionali costruendo separatamente per ogni gruppo parziale di invarianti irrazionali le funzioni elementari simmetriche dei suoi elementi; ma tale metodo non sarà in generale il più opportuno. Per esempio, poichè gli invarianti $\gamma_{ih,ih}$ del gruppo A corrispondono uno per uno alle combinazioni semplici di 2ª classe di n oggetti, perchè delle espressioni intiere nelle $\gamma_{ih,ih}$ siano invarianti rispetto al gruppo simmetrico G_n di grado n, è necessario e basta che esse lo siano, non rispetto all'intiero gruppo simmetrico di grado $n(n-1):2$, ma rispetto ad un sottogruppo di questo isomorfo a G_n. E la stessa cosa vale anche per gli elementi di ciascuno dei gruppi $B_2, B_3, \ldots, B_{n-2}$.

Quanto ai gruppi C e D, per $n = 4$, essi risultano ciascuno di un solo invariante, che è razionale. Per $n \geq 5$ perchè delle espressioni intiere negli elementi del gruppo C (o D) sieno invarianti rispetto a G_n, non occorre che esse lo siano rispetto all'intiero gruppo simmetrico di grado $n(n-1)(n-2)(n-3):24$. È invece necessario e basta che lo siano rispetto ad un sottogruppo in questo contenuto, che è isomorfo a G_n, e che, soltanto per $n = 5$, coincide col gruppo totale.