ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle Variazioni*. Nota II di LEONIDA TONELLI, presentata dal Socio S. PINCHERLE.

1. Ci proponiamo di dimostrare qui una proposizione già annunciata nella Nota I, e che ci sembra notevole. Ne faremo poi alcune applicazioni.

2. Consideriamo, insieme alla C, un'altra curva C_1, interna essa pure al campo A ([1]) e continua e rettificabile. Indicando con

$$\int_C F(x, y, x', y')\, ds \quad , \quad \int_{C_1} F(x, y, x', y')\, ds$$

gli integrali della funzione F estesi alle due curve, vogliamo dimostrare che *Se la curva* C_1 *tende alla* C ([2]) *in modo che la sua lunghezza tenda alla lunghezza di quest'ultima, è*

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F(x, y, x', y')\, ds = \int_C F(x, y, x', y')\, ds.$$

Riprendendo la funzione $\overline{F}(x, y, x', y')$ del n. 4 della Nota I, possiamo applicarle il teorema del n. 27 della Memoria (T) ([3]) e scrivere

$$\int_C \overline{F}(x, y, x', y')\, ds \leq \text{Min} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} \overline{F}(x, y, x', y')\, ds\,.$$

Ed essendo

$$\overline{F}(x, y, x', y') = F(x, y, x', y') + m \sqrt{x'^2 + y'^2},$$

abbiamo

$$\int_C F(x, y, x', y')\, ds + m \int_C \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds \leq$$

$$\leq \text{Mim} \lim_{C_1 \equiv C} \left\{ \int_{C_1} F(x, y, x', y')\, ds + m \int_{C_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds \right\}.$$

([1]) Conserveremo qui tutte le notazioni della Nota I.

([2]) Per tutto ciò che si riferisce alla convergenza di una curva verso un'altra, vedi M. Fréchet, *Sur quelques points du calcul functionnel*. Rend. Circ. Matem. di Palermo, tomo XXII (1906). Ricordiamo che condizione necessaria e sufficiente affinchè C_1 tenda a C è che esista una rappresentazione simultanea delle curve C e C_1

$$x = x(t) \;,\quad y = y(t) \qquad\qquad (t^{(0)} = t \leq t^{(1)})$$
$$x = x_1(t) \;,\quad y = y_1(t)$$

in modo che le $x_1(t)$, $y_1(t)$ tendano uniformemente e rispettivamente alle $x(t)$, $y(t)$.

([3]) Veramente il teorema, al luogo citato, è dato solo per una successione di curve: la dimostrazione però può ripetersi tal quale anche nel caso generale.

Ma è

$$\int_C \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds = \text{lunghezza di C}$$

$$\int_{C_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds = \text{lunghezza di } C_1\,,$$

e, per ipotesi, la lunghezza di C_1 tende a quella di C. È dunque

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_C \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds = \lim_{C_1 \equiv C} \text{lungh } C_1 = \text{lungh C}$$

e perciò

$$\int_C F(x, y, x', y')\, ds + m \int_C \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds \leq$$

$$\leq \text{Min} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F(x, y, x', y')\, ds + m \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds\,,$$

$$(1) \qquad \int_C F\, ds \leq \text{Min} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F\, ds\,.$$

Sia, ora, M un numero positivo *maggiore* del più grande dei valori assoluti dei massimi delle due funzioni F e F_1, per tutti i punti (x, y) di A e per tutti quelli (x', y') della circonferenza $x'^1 + y'^2 = 1$; e consideriamo la funzione

$$\overline{\overline{F}}(x, y, x', y') \equiv F(x, y, x', y') - M \sqrt{x'^2 + y'^2}\,,$$

per la quale si ha

$$\overline{\overline{F}}_1 \equiv F_1 - M \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}\,.$$

Questa nuova funzione $\overline{\overline{F}}$ soddisfa a tutte le condizioni poste per le F, e inoltre, alle due

$$\overline{\overline{F}} < 0 \quad , \quad \overline{\overline{F}}_1 < 0$$

in tutti i punti (x, y) di A e (x', y') di $x'^2 + y'^2 = 1$. Lo stesso teorema del n. 27 della Memoria (T) dà perciò

$$\int_C \overline{\overline{F}}\, ds \geq \text{Mass} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} \overline{\overline{F}}\, ds$$

$$\int_C F\, ds - M \int_C \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds \geq \text{Mass} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F\, ds - M. \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} \sqrt{x'^2 + y'^2}\, ds$$

$$\int_C F\, ds \geq \text{Mass} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F\, ds\,.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (1), concludiamo che esiste il limite dell'integrale $\int_{C_1} F\,ds$, quando C_1 tende a C, nel modo detto, e che è

$$(2) \qquad \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F\,ds = \int_C F\,ds\,.$$

Il nostro teorema è dunque perfettamente dimostrato.

3. Si potrebbe essere indotti a credere che il tendere a zero della differenza delle lunghezze delle curve C_1 e C, al tendere di C_1 a C, sia condizione, oltre che sufficiente, anche necessaria perchè si verifichi la uguaglianza (2) (tranne naturalmente il caso della $F \equiv 0$). È facile però convincersi del contrario. Si prenda

$$F(x\,, y\,, x'\,, y') \equiv \frac{x'^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

e come curva C il segmento rettilineo che unisce i punti del piano $(x\,, y)$ di coordinate $(0\,, 0)\,, (1\,, 0)$. Si costruisca la C_1 congiungendo questi due punti con una spezzata di $2n$ lati, tutti di lunghezza $\frac{1}{2n}$, alternativamente perpendicolari e paralleli a C, e così disposti che quelli perpendicolari abbiano sempre un estremo in C. È allora

$$\int_C \frac{x'^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,ds = \int_C ds = 1$$

$$\int_{C_1} \frac{x'^2}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\,ds = \int_{C_1} x'^2\,ds = 1\,.$$

In questo caso, la (2) è dunque verificata, mentre è: lunghezza di $C_1 = 2 = 2$. lungh. C.

4. Dal teorema del n. 2 deduciamo questo corollario:

Se una linea C *si deforma con continuità, in modo da conservare sempre la stessa lunghezza, l'integrale della funzione* F, *esteso alla* C, *varia pure con continuità.*

5. Un'altra proposizione vogliamo ora dedurre da quella del n. 2. È necessario però premettere il seguente lemma:

Se le funzioni $s_n(x)$, *tutte non decrescenti, convergano, per* $n = \infty$, *in ogni punto di* $(a\,, b)$ *verso una funzione continua* $s(x)$, *la convergenza è uniforme.*

Preso un numero positivo ε, sia δ tale che dalla disuguaglianza $|x_1 - x_2| < \delta$ (x_1 e x_2 punti di $(a\,, b)$) si deduca sempre

$$|s(x_1) - s(x_2)| < \varepsilon\,.$$

Si divida (a, b) in un numero r di parti tutte $< \delta$. È possibile, per la convergenza delle $s_n(x)$, determinare un numero $\bar{n}$ tale che, per ogni $n > \bar{n}$, sia

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

in tutti gli $r + 1$ estremi di queste parti. È allora, indicando con x_1 e x_2 gli estremi di una parte qualunque, e con x un punto arbitrario compreso tra essi,

$$|s(x_1) - s(x)| < \varepsilon \quad , \quad |s(x_2) - s(x)| < \varepsilon$$

$$s(x_1) - \varepsilon < s_n(x_1) \leq s_n(x) \leq s_n(x_2) < s(x_2) + \varepsilon$$

$$s(x) - 2\varepsilon < s_n(x) < s(x) + 2\varepsilon$$

$$|s(x) - s_n(x)| < 2\varepsilon$$

e ciò per tutti gli $n > \bar{n}$ e tutti i punti di (a, b). Il lemma è così dimostrato.

6. Possiamo, dopo ciò, dimostrare il teorema di convergenza che segue.

Sia $f(x, y, p)$ una funzione delle tre variabili x, y, p, tale che

$$x' f\left(x, y, \frac{y'}{x'}\right) \equiv \mathrm{F}(x, y, x', y')$$

soddisfi alle condizioni poste per la F ai numeri precedenti; siano poi $y(x)$, $\bar{y}(x)$ due funzioni date nell'intervallo (a, b) ed ivi *assolutamente continue*. Allora

Se la $y(x)$ tende uniformemente in (a, b) alla $\bar{y}(x)$ e $\int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx$ tende a $\int_a^b \sqrt{1 + \bar{y}'^2(x)}\, dx$, il primo dei due integrali

$$\int_a^x f(x, y(x), y'(x))\, dx \quad , \quad \int_a^x f(x, \bar{y}(x), \bar{y}'(x))\, dx$$

tende uniformemente, in tutto (a, b), al secondo.

Per l'assoluta continuità delle funzioni $y(x), \bar{y}(x)$: 1°, esistono in tutti i punti di (a, b), ad eccezione al più di un insieme di misura nulla, le derivate $y'(x), \bar{y}'(x)$ (1); 2°, esistono gli integrali

$$\int_a^x \sqrt{1 + y'^2(x)}\, dx \quad , \quad \int_a^x \sqrt{1 + \bar{y}'^2(x)}\, dx$$

e rappresentano, rispettivamente, le lunghezze delle curve $y = y(x)$, $y = \bar{y}(x)$, nell'intervallo (a, x) (2); 3°, esistono gli integrali che stiamo per scrivere

(1) Vedi H. Lebesgue, *Leçons sur l'integration* ecc., pag. 128.

(2) Vedi L. Tonelli, *Sulla rettificazione delle curve.* Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1907-08.

e valgono le uguaglianze

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^x f(x\,,y\,,y')\,dx = \int_{s(a)}^{s(x)} \mathrm{F}(x(s)\,,y(s)\,,x'(s)\,,y'(s))\,ds \\ \displaystyle\int_a^x f(x\,,\overline{y}\,,\overline{y}')\,dx = \int_{\overline{s}(a)}^{\overline{s}(x)} \mathrm{F}(\overline{x}(s)\,,\overline{y}(s)\,,\overline{x}'(s)\,,\overline{y}'(s))\,ds \end{cases}$$ [1].

Inoltre, perchè per ipotesi è

$$\lim_{y\equiv\overline{y}} \int_a^b \sqrt{1+\overline{y'(x)}^2}\,dx = \int_a^b \sqrt{1+\{\overline{y}'(x)\}^2}\,dx\,,$$

è anche, per ogni x di $(a\,,b)$

$$\lim_{y\equiv\overline{y}} \int_a^x \sqrt{1+\{y'(x)\}^2}\,dx = \int_a^x \sqrt{1+\{\overline{y}'(x)\}^2}\,dx\,.$$

Ciò risulta subito osservando che è

$$\mathrm{Min}\lim_{y\equiv\overline{y}} \int_a^x \sqrt{1+\{y'(x)\}^2}\,dx \geq \int_a^x \sqrt{1+\{\overline{y}'(x)\}^2}\,dx$$

$$\mathrm{Min}\lim_{y\equiv\overline{y}} \int_x^b \sqrt{1+\{y'(x)\}^2}\,dx \geq \int_x^b \sqrt{1+\{\overline{y}'(x)\}^2}\,dx\,.$$

Applicando il lemma dimostrato al n. precedente, si ha anche che la convergenza dell'integrale $\int_a^x \sqrt{1+\{y'(x)\}^2}\,dx$ è uniforme in tutto $(a\,,b)$. Per il teorema del n. 2 si ha poi

$$\lim_{y\equiv\overline{y}} \int_{s(a)}^{s(x)} \mathrm{F}(x\,,y\,,x'\,,y')\,ds = \int_{\overline{s}(a)}^{\overline{s}(x)} \mathrm{F}(\overline{x}\,,\overline{y}\,,\overline{x}'\,,\overline{y}')\,ds\,.$$

Anche qui la convergenza è uniforme. Invero, le $s(x)$, poichè convergono uniformemente verso la $\overline{s}(x)$, costituiscono una varietà di funzioni ugualmente continue in $(a\,,b)$: sono tali cioè che, preso un ε arbitrario, si può sempre, in corrispondenza, determinare in δ per il quale, dalla disuguaglianza $|x_1 - x_2| < \delta$, con $x_1\,,x_2$ punti di $(a\,,b)$, scende l'altra

$$|s(x_1) - s(x_2)| < \varepsilon\,,$$

qualunque sia la $s(x)$ della varietà. Osserviamo, ora, che nei punti $(x\,,y)$ nei quali si considera la F e in quelli $(x'\,,y')$ della circonferenza $x'^2+y'^2=1$, la F stessa è continua e quindi in modulo resta inferiore ad un numero fisso M; e ricordiamo che i punti dell'intervallo $(s(a)\,,s(b))$ in cui non è $\overline{x'(s)}^2 + \overline{y'(s)}^2 = 1$ costituiscono un insieme di misura nulla, insieme che,

[1] Cfr. L. Tonelli, *Sugli integrali curvilinei*. Rend. Acc. Lincei, febbraio 1911.

come si sa, è perfettamente trascurabile agli effetti dell'integrazione. Possiamo scrivere, perciò,

$$\left|\int_{s(a)}^{s(x_1)} \mathrm{F}(x\,,y\,,x'\,,y')\,ds - \int_{s(a)}^{s(x_2)} \mathrm{F}(x\,,y\,,x'\,,y')\,ds\right| =$$

$$= \left|\int_{s(x_2)}^{s(x_1)} \mathrm{F}(x\,,y\,,x'\,,y')\,ds\right| < |s(x_1) - s(x_2)|\,\mathrm{M} < \varepsilon\mathrm{M}\,.$$

Gli integrali

$$\int_{s(a)}^{s(x)} \mathrm{F}(x\,,y\,,x'\,,y')\,ds$$

risultano così ugualmente continui in $(a\,,b)$. Ciò basta per essere sicuri della loro convergenza uniforme.

Tenendo conto delle uguaglianze (3), il teorema propostoci risulta interamente dimostrato.

7. Facciamo un'altra applicazione del teorema del n. 2.

Si debba risolvere il seguente problema — detto degli *isoperimetri* —: fra tutte le curve C [1], giacenti in un dato campo ed aventi tutte la stessa lunghezza, trovare quella che rende minimo (o massimo) l'integrale

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{F}(x\,,y\,,x'\,,y')\,ds\,.$$

Si determini il limite inferiore (o superiore) I dei valori che l'integrale assume per tutte le possibili curve C, e si scelga una successione $\mathrm{C}_1\,,\mathrm{C}_2\,,\ldots$ di tali curve in modo che sia

$$\lim_{n=\infty} \int_{\mathrm{C}_n} \mathrm{F}\,ds = \mathrm{I}\,.$$

Le curve C_n, avendo tutte la stessa lunghezza, ammettono, per un noto teorema, una curva limite $\overline{\mathrm{C}}$. Se allora è possibile dimostrare [2] che la lunghezza della $\overline{\mathrm{C}}$ (che non può essere maggiore) è precisamente uguale a quella delle C_n, il teorema del n. 2 mostra che è

$$\int_{\overline{\mathrm{C}}} \mathrm{F}\,ds = \lim_{n=\infty} \int_{\mathrm{C}_n} \mathrm{F}\,ds = \mathrm{I}\,,$$

vale a dire, stabilisce l'esistenza del minimo (o massimo) di cui qui è questione.

Il metodo ora usato si applica anche alla risoluzione del problema generale di minimo (massimo): trovare, fra tutte le curve di un dato campo, quella che rende minimo (massimo) l'integrale della F. Solo qui si deve aggiungere in più la dimostrazione dell'esistenza di una curva limite per le $\mathrm{C}_1\,,\mathrm{C}_2\,,\ldots$, determinate come dianzi.

(1) Si potrebbe considerare anche solo una classe speciale di tali curve.
(2) In taluni casi la dimostrazione è immediata.