ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

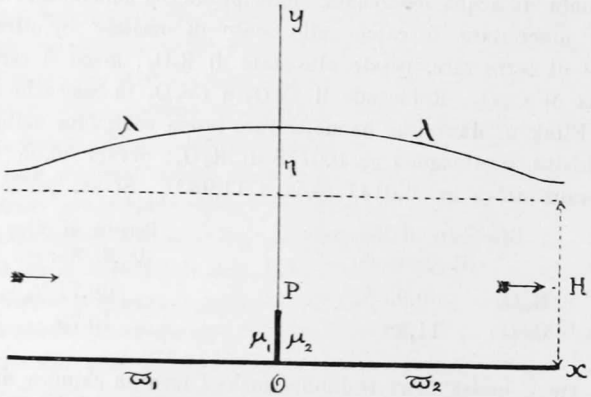
1912

nerale dotato di peso specifico più elevato. Con ripetute prove, mi sono, così, accertato che la velocità di caduta è la stessa per la sinchisite e la parisite inalterate, il che dimostra che il peso specifico dei due minerali è sensibilmente lo stesso. La sinchisite alterata possiede un peso specifico più basso: la sua velocità di caduta è circa $^2/_3$ di quella di un frammento uguale di sinchisite fresca.

Mi sembra, così, di avere dimostrato definitivamente l'identità della sinchisite e della parisite.

Meccanica — *Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Si consideri un canale scoverto a fondo orizzontale, in regime permanente. In una determinata sezione trasversale, e per tutta la larghezza, sia rigidamente connessa al fondo una traversa verticale.



E ovvio che la presenza di questo ostacolo influisce sopra l'andamento della corrente. In particolare il pelo libero λ — orizzontale quando non c'è la traversa — presenta, in prossimità della regione soprastante all'ostacolo, una intumescenza.

Oggetto della presente Nota è di caratterizzare tale intumescenza.

Sieno: $h = \overline{OP}$ l'altezza della traversa; H la profondità del canale a grandi distanze da OP (teoricamente all'infinito, sia a monte che a valle); c il valore assoluto che ivi ha la velocità della corrente; η l'altezza della intumescenza, cioè la differenza fra il massimo scostamento del pelo libero λ dal fondo del canale e la profondità assintotica H del canale stesso; g l'accelerazione di gravità.

Se c è abbastanza rilevante rispetto a $|\sqrt{2gh}|$ [velocità di caduta libera di un grave (nel vuoto) da una altezza pari a quella della traversa] per cui si possa ritenere trascurabile il rapporto $\frac{2gh}{c^2} = \left(\frac{\sqrt{2gh}}{c}\right)^2$, il c ampo di forza non ha influenza sensibile sul fenomeno, ed è lecito prescinderne.

In tal caso, η e h sono legate tra loro, a mezzo di un parametro ausiliario σ_0, dalle notevoli relazioni (11) e (13). L'andamento del pelo libero λ risulta definito, per mezzo di una quadratura ellittica.

Nel caso, praticamente più interessante, in cui l'accidentalità del fondo è così piccola di fronte alla profondità del canale, per cui del rapporto $\frac{h}{H}$ si possono ritenere trascurabili le potenze superiori alla seconda, si ha la relazione particolarmente semplice:

$$\eta = \frac{\pi h^2}{4H};$$

mentre per il profilo libero [sezione della superficie libera del canale con un piano x, y parallelo alle sponde] si ottiene la seguente equazione:

$$y = H + \frac{\pi h^2}{4H} \operatorname{sech} \frac{\pi x}{2H},$$

il sistema di riferimento essendo quello indicato in figura.

Come si vede l'andamento qualitativo di λ richiama alla mente il profilo dell'*onda solitaria* (1).

Questi risultati si ottengono trattando il problema in due dimensioni e sfruttando il noto metodo di Levi-Civita, che ha già dato luogo a numerose e notevoli applicazioni. Anzi è da una di queste che la questione può farsi dipendere, come ora vedremo.

1. Immaginiamo che il moto avvenga per piani verticali, paralleli alle sponde, col medesimo comportamento per ognuno di essi, lo stato di moto essendo lo stesso su tutti i punti di una generica retta normale alle sponde. Assunto uno dei piani come piano $z = 0$ di un sistema di riferimento, basterà occuparsi del moto in questo piano; su esso si assuma la coppia di assi Oxy come è chiaramente indicato in figura.

Il moto della corrente sia *permanente* ed *irrotazionale*.

Le equazioni idrodinamiche si compendiano allora nella seguente relazione:

$$\tfrac{1}{2}V^2 + gy + p = \text{costante},$$

avendo assunto eguale ad 1 la densità (costante) del liquido, e designando al solito con p la pressione, e V il valore assoluto della velocità.

(1) Come è noto, nella equazione dell'onda solitaria, la sech. comparisce sotto esponente *due*. Cfr. ad esempio Lamb, *Hydrodynamics* (terza edizione) [Cambridge, University Press, 1906], art. 248.

Sul pelo libero λ la pressione p è a ritenersi costante, sarà percio

$$V^2 + 2gy = \text{costante, sopra } \lambda,$$

ovvero, notando che sopra λ è $y = H + y_1$ $(0 \leq y_1 \leq \eta)$ — y_1 denotando il sopraelevamento di un generico punto di λ dal livello assintotico H — si può scrivere

$$V^2 \left\{ 1 + \frac{2gy_1}{V^2} \right\} = \text{costante, sopra } \lambda.$$

Introduciamo la condizione che il termine $\frac{2gy_1}{V^2}$, sia trascurabile di fronte all'unità [1]; allora dalla precedente si deduce che V è costante sopra λ, e poichè all'infinito, sia a monte che a valle è $V = c$, sarà senz'altro

$$V = c, \quad \text{sopra } \lambda. \tag{1}$$

Il problema risulta in tal modo indipendente dalla gravità.

2. Si può allora fare rientrare la questione in un problema già posto e ampiamente discusso [2].

Indicando al solito con u, v le componenti di velocità, φ e ψ rispettivamente il potenziale di velocità e la funzione di corrente, e si pone

$$x + iy = z \quad , \quad u - iv = w \quad , \quad \varphi + i\psi = f; \tag{2}$$

w ed f risultano notoriamente funzioni di $z = x + iy$, e sono legate fra loro dalla relazione

$$\frac{df}{dz} = w. \tag{3}$$

Si assuma, per maggiore comodità, $c = 1$, e si ponga

$$w = e^{-i\omega} = e^{-i(\vartheta + i\tau)} = e^{\tau - i\vartheta} \qquad (\vartheta \text{ e } \tau \text{ reali}), \tag{4}$$

convenendo che per $z = \infty$ $[|w| = c = 1]$ sia $\omega = 0$.

Dalla precedente risulta che la parte reale ϑ di $\omega = \vartheta + i\tau$, definisce in ogni punto l'angolo che la linea di flusso, che lo contiene, forma coll'asse reale. Tale angolo va contato fra 0 e π positivamente nel verso $x \longrightarrow y$, partendo dalla direzione positiva dell'asse x, negativamente nel verso opposto.

[1] Questa condizione è inclusa nella ipotesi che la velocità della corrente sia abbastanza rilevante rispetto a $\sqrt{2gh}$, per cui si possa ritenere trascurabile il quadrato del rapporto di quest'ultima alla prima. Basta notare che [cfr. n. 4] è $y_1 \leq \eta \leq h$.

[2] Colonnetti, *Sul moto di un liquido in un canale* [Rend. Circ. Mat. di Palermo, 1911, tomo XXXII, pp. 51-87].

Dopo ciò, tenuto conto dell'andamento del fondo del canale, e tenuta presente la (1), in cui si è preso $c = 1$, si conclude quanto segue.

La funzione $\omega(z) = \vartheta(x, y) + i\tau(x, y)$ *dev'essere regolare nel campo del moto, deve annullarsi per* $z = \infty$, *e sul contorno la sua parte reale ed il coefficiente di* i *devono soddisfare alle seguenti condizioni* (vedi figura):

$$(5)\qquad \begin{cases} \tau = 0 \text{ sopra } \lambda\,;\ \vartheta = 0 \text{ sopra } \varpi_1 \text{ e } \varpi_2\,,\ \vartheta = \dfrac{\pi}{2} \text{ sopra } \mu_1\,, \\ \vartheta = -\dfrac{\pi}{2} \text{ sopra } \mu_2\,. \end{cases}$$

3. Coi cambiamenti di variabile, definiti dalle relazioni:

$$(6)\qquad \begin{cases} z = z(f)\,, \\ f = i\mathrm{H} + \dfrac{2\mathrm{H}}{\pi} \log \dfrac{1-\zeta}{1+\zeta}\,, \end{cases}$$

si può rappresentare, in modo conforme, il campo del moto nel semicerchio

$$|\zeta| = |\xi + i\eta| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \leq 1\ ,\ \eta \geq 0\ (^1).$$

Riportandoci in tale campo, si trova che la funzione

$$(7)\qquad \omega(\zeta) = i \log \left[\frac{1 - i\zeta}{1 + i\zeta} \sqrt{\frac{(\zeta_1 - \zeta)(\zeta - \zeta_2)}{(1 - \zeta_1\zeta)(1 - \zeta_2\zeta)}} \right],$$

soddisfa a tutte le condizioni volute, essendo ζ_1 e ζ_2 due punti della circonferenza $|\zeta| = 1$ simmetrici rispetto all'asse immaginario (²).

Il punto P del piano z da coordinare ad un ζ assegnato, rimane definito, a norma delle (3) e (4), da

$$(8)\qquad z = \int_i^\zeta e^{i\omega}\, df = \frac{4\mathrm{H}}{\pi} \int_\zeta^i \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} \sqrt{\frac{(1 - \zeta_1\zeta)(1 - \zeta_2\zeta)}{(\zeta_1 - \zeta)(\zeta - \zeta_2)}} \cdot \frac{d\zeta}{1 - \zeta^2}\,.$$

4. *Equazioni parametriche del pelo libero.* — Per fare descrivere a z il pelo libero λ, bisogna che ζ percorra l'asse reale; mandando per es. z da 1 a -1 si descriverà λ dall'infinito a monte fino all'infinito a valle. Poichè per $\zeta = 0$ si assume $x = 0$, avremo per un generico punto z di λ

$$(9)\qquad z - iy_0 = \frac{4\mathrm{H}}{\pi} \int_\zeta^0 \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} \sqrt{\frac{(1 - \zeta_1\zeta)(1 - \zeta_2\zeta)}{(\zeta_1 - \zeta)(\zeta - \zeta_2)}}\, \frac{d\zeta}{1 - \zeta^2}\,,$$

(¹) Cfr. Colonnetti, loc. cit., § 6.

(²) Cfr. Cisotti, *Vene fluenti* [Rendic. Circ. Mat. di Palermo (1908), tomo XXV, pag. 145 e seg.], formula (37′), in cui si faccia

$$n = 4\ ,\ \vartheta_1 = 0\ ,\ \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}\ ,\ \vartheta_3 = -\frac{\pi}{2}\ ,\ \vartheta_4 = 0\,;$$

oppure Colonnetti, loc. cit., formula (56), che è identica a quella ora citata.

con ζ reale e compreso tra -1 e $+1$, y_0 designando l'ordinata del punto di λ che corrisponde a $\zeta = 0$.

Per avere le espressioni parametriche delle coordinate x, y, basterà porre $z = x + iy$, $\zeta_1 = e^{i\sigma_0}$, $\zeta_2 = -e^{-i\sigma_0}$ $\left(0 \leq \sigma_0 \leq \frac{\pi}{2}\right)$, e notando che ζ è reale, separare la parte reale della immaginaria. Si ottiene così, tenendo presente che all'infinito, dev'essere $y = \mathrm{H}$:

$$(10)\quad \begin{cases} x = \dfrac{4\mathrm{H}}{\pi} \displaystyle\int_{\zeta}^{0} \frac{(1-\zeta^2)^2 + 4\zeta^2 \operatorname{sen}\sigma_0}{\sqrt{(1-\zeta^2)^2 + 4\zeta^2 \operatorname{sen}^2\sigma_0}} \frac{d\zeta}{1-\zeta^4}, \\ y = \mathrm{H} + \dfrac{2\mathrm{H}}{\pi} \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\sigma_0}{2}\right) \times \\ \quad \times \log\left[\dfrac{1 + 2\cos\sigma_0 + \zeta^2 + \sqrt{1 - 2\zeta^2\cos 2\sigma_0 + \zeta^4}}{1 - 2\cos\sigma_0 + \zeta^2 + \sqrt{1 - 2\zeta^2\cos 2\sigma_0 + \zeta^4}} \cdot \dfrac{1 + \operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}}{1 + \cot\frac{\sigma_0}{2}}\right]. \end{cases}$$

5. *Altezza della intumescenza.* — Il minimo valore di y è H; il massimo si ha per $\zeta = 0$; pertanto *la altezza η della intumescenza* — differenza fra il massimo ed il minimo dei valori di y — *ha per espressione*

$$(11)\qquad \eta = \frac{2\mathrm{H}}{\pi} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma_0}{2}\right) \log \frac{1 + \cot\frac{\sigma_0}{2}}{1 + \operatorname{tg}\frac{\sigma_0}{2}}.$$

6. *Altezza della traversa.* — L'espressione dell'elemento lineare del piano z, cioè di $|dz| = |\sqrt{dx^2 + dy^2}|$, in termini di ζ è, come risulta da (3) e (4),

$$(12)\qquad |dz| = |e^{i\omega}|\,|df| = e^{-\tau}|df|.$$

Per questa e per la (6) e (7), si ricava la seguente espressione, per l'elemento di traversa,

$$(12')\qquad |dz| = \frac{2\mathrm{H}}{\pi} \frac{|d\sigma|}{\operatorname{sen}\sigma}, \quad \left(\sigma_0 \leq \sigma \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

L'altezza h della traversa viene quindi definita dalla relazione

$$h = \int_{\mathrm{OP}} |dz| = \frac{2\mathrm{H}}{\pi} \int_{\sigma_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tau}}{\operatorname{sen}\sigma} d\sigma = \frac{2\mathrm{H}}{\pi} \int_{\sigma_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\sigma}{1 + \operatorname{sen}\sigma} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen}\sigma_0}{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen}\sigma_0}} \frac{d\sigma}{\operatorname{sen}\sigma}$$

Questo integrale si valuta senza difficoltà ponendo $\frac{\operatorname{sen}\sigma + \operatorname{sen}\sigma_0}{\operatorname{sen}\sigma - \operatorname{sen}\sigma_0} = t^2$, si ottiene così in definitiva

$$(13) \qquad h = \frac{4H}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}\sigma_0}{1-\operatorname{sen}\sigma_0}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{sen}\sigma_0}{1+\operatorname{sen}\sigma_0}}\log\operatorname{sen}\sigma_0\right\}.$$

7. *Piccola accidentalità del fondo.* — Poniamo

$$(14) \qquad \sigma_0 = \frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

designando ε un numero di cui si possono trascurare le potenze superiori alla seconda. Notando che in tale ipotesi, è $\operatorname{sen}\sigma_0 = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$, $\cos\sigma_0 = \varepsilon$, le (10), (11), (13) diventano rispettivamente

$$(15) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{4H}{\pi}\displaystyle\int_\zeta^0 \frac{d\zeta}{1-\zeta^2} = \frac{2H}{\pi}\log\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\ ;\ y = H + \frac{H\varepsilon^2}{\pi}\frac{1-\zeta^2}{1+\zeta^2}\ ; \\ \eta = \dfrac{H\varepsilon^2}{\pi}\ ;\ h = \dfrac{2H}{\pi}\varepsilon. \end{cases}$$

Da quest'ultima scende che ε *è il rapporto* $\frac{h}{H}$, *fra l'altezza della traversa e la profondità assintotica del canale, moltiplicato per* $\frac{1}{2}\pi$.

Le (15) valgono pertanto se di detto rapporto sono trascurabili le potenze superiori alla seconda.

L'equazione del pelo libero λ si ottiene dalle due prime delle (15) eliminando tra esse il parametro ζ e ponendo per ε la sua espressione data dall'ultima delle (15) stesse:

$$(16) \qquad y = H + \frac{\pi h^2}{4H}\operatorname{sech}\frac{\pi x}{2H}.$$

L'altezza della intumescenza viene invece definita da

$$(17) \qquad \eta = \frac{\pi h^2}{4H}.$$

8. *Osservazione.* — I risultati dei numeri che precedono furono ricavati in base alla ipotesi $c = 1$ [cfr. n. 2]. Essi continuano però a sussistere qualunque sia c. Basta porre infatti $f^\star = cf$, $w^\star = cw$, per avere il caso in cui la velocità assintotica della corrente è c; $f^\star$ e $w^\star$ sono naturalmente legate fra loro dalla nota relazione

$$\frac{df^\star}{dz} = w^\star,$$

la quale, per le sopra cennate espressioni di $f^\star$ e $w^\star$, è identica alla (3). Da ciò la nostra conclusione.