ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 19 maggio 1912.

F. D' Ovidio Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra certi sistemi di superficie pseudosferiche collegati ai sistemi di Weingarten.* Nota del Socio Luigi Bianchi.

Nei miei antichi studî sulle famiglie di Lamé composte di superficie a curvatura costante ho dato il nome di *sistemi di Weingarten* a quei particolari sistemi tripli ortogonali, nei quali la curvatura delle superficie della detta famiglia è la medesima costante per tutte [1]. Mi propongo nella presente Nota di far conoscere una classe più generale di sistemi di superficie pseudosferiche, a cui si perviene colle considerazioni seguenti.

Suppongasi di avere un sistema *pseudosferico* (W) di Weingarten. La corrispondenza che viene segnata sulle superficie pseudosferiche del sistema dai punti di incontro colle loro trajettorie ortogonali gode della seguente proprietà, che conviene qui enunciare esplicitamente:

a) Sulle superficie W *del sistema si corrispondono le linee asintotiche ed i loro archi corrispondenti sono eguali (ciò che ha per conseguenza il corrispondersi anche delle linee di curvatura).*

Ora possiamo più in generale considerare sistemi ∞^1 di superficie pseudosferiche di egual raggio R, che si corrispondano punto per punto, in

[1] Cfr. la mia Memoria del 1885: *Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten* nel tomo XIII, ser. 2ª degli Annali di Matematica, ovvero il Cap. XXIV, vol. II delle mie *Lezioni di geometria differenziale* (2ª ediz.). Ved. anche Darboux, *Leçons sur les systhèmes orthogonaux*, livre II, chap. VI.

modo che la proprietà *a*) venga conservata, però *le trajettorie dei singoli punti, invece di tagliare ad angolo retto le superficie pseudosferiche, le taglino sotto un angolo costante qualunque.*

Denotando con $\frac{\pi}{2} - \sigma$ il valore costante di questo angolo, indicheremo questi sistemi di superficie pseudosferiche come sistemi (Ω_σ); per $\sigma = 0$ abbiamo i sistemi di Weingarten.

Un primo e più semplice esempio di sistemi (Ω_σ) si ha nelle ∞^1 superficie pseudosferiche S′ che derivano da una fissa S per una trasformazione B_σ di Bäcklund; queste S′ formano appunto un sistema (Ω_σ), colla particolarità che qui le trajettorie dei singoli punti sono circoli dello stesso raggio ($= R \cos \sigma$).

Un altro singolare esempio di sistemi (Ω_σ) viene fornito dalle generali elicoidi pseudosferiche. Ho dimostrato [1] che ogni tale elicoide, assoggettata ad un *conveniente* moto elicoidale attorno al suo asse, gode della proprietà caratteristica di tagliare sotto angolo costante le eliche trajettorie dei suoi punti. Per ciò il sistema delle ∞^1 posizioni di questa elicoide è appunto un sistema (Ω_σ).

2. I sistemi generali (Ω_σ) di superficie pseudosferiche comprendono, come si è detto, quali casi particolari, i sistemi (W) di Weingarten ai quali si riducono per $\sigma = 0$. Ma ciò che più importa osservare è che, inversamente, i sistemi generali (Ω_σ) si ottengono dagli speciali (W) di Weingarten applicando a questi ultimi la così detta trasformazione L_σ di Lie. Conviene ricordare che questa trasformazione L_σ risulta dalle osservazioni seguenti. Le superficie pseudosferiche (il cui raggio R assumiamo per semplicità $= 1$) dipendono biunivocamente dalle soluzioni $\varphi(u, v)$ della equazione a derivate parziali

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi ;$$

ogni tale soluzione φ individua *intrinsecamente* una corrispondente superficie pseudosferica, che possiamo indicare con S_φ, mediante l'espressione

$$ds^2 = \cos^2 \varphi \, du^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi \, dv^2$$

del suo ds^2 riferito alle linee di curvatura (u, v). Si deve a Lie l'osservazione che: da una soluzione nota $\varphi(u, v)$ della (I) se ne ottiene subito una nuova $\overline{\varphi}(u, v)$ *con una costante arbitraria* σ, ponendo

$$\overline{\varphi}(u, v) = \varphi\left(\frac{u - v \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}, \frac{v - u \operatorname{sen} \sigma}{\cos \sigma}\right).$$

[1] Ved. il § 9 della mia Memoria: *Sopra una classe di deformazioni continue delle superficie pseudosferiche*. Annali di mat., ser. III, tomo 18 (1911).

Così la superficie pseudosferica S_φ ne individua una seconda $S_{\overline{\varphi}}$, che si dice derivata dalla prima per mezzo della trasformazione L_σ di Lie. Il significato della L_σ resta però in questo puramente analitico, giacchè la trasformata $S_{\overline{\varphi}}$ non ha colla primitiva S_φ un rapporto di posizione necessariamente fissato, che si traduca in una costruzione geometrica nello spazio (come avviene per la trasformazione complementare e di Bäcklund).

Tanto più notevole sembra quindi che la trasformazione L_σ di Lie venga ora ad acquistare un significato geometrico nel passaggio dai particolari sistemi (W) di Weingarten ai generali (Ω_σ). E in effetto: se di ciascuna superficie pseudosferica S del sistema di Weingarten si prende la trasformata $\overline{S}$ per una medesima L_σ, queste ∞^1 trasformate $\overline{S}$, *convenientemente collocate nello spazio*, vengono appunto a costituire un sistema (Ω_σ).

Per tal modo le questioni concernenti l'esistenza ed il grado di arbitrarietà dei sistemi (Ω_σ) vengono ricondotte alle questioni analoghe già risolute pei sistemi (W) di Weingarten.

Aggiungiamo ancora che *ai generali sistemi (Ω_σ) risultano applicabili la trasformazione complementare e quella di Bäcklund*, come accade pei sistemi di Weingarten.

Riserbandomi di sviluppare in una prossima Memoria la teoria generale sopra indicata, mi limiterò qui a considerare un caso particolarmente notevole di sistemi (Ω_σ), dedotti con trasformazione di Lie, nel modo sopra descritto, da quei singolari sistemi di Weingarten che ho chiamato: *sistemi a flessione costante*.

3. In questi ultimi sistemi, di cui trattano i paragrafi 6, 10 della mia Memoria del 1885 [1], le trajettorie ortogonali delle superficie pseudosferiche, di raggio $R=1$, hanno appunto la flessione costante $=1$. Tali sistemi si presentano sempre a coppie di sistemi *complementari*, corrispondenti alle rispettive forme:

$$ds^2 = \cos^2\Phi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\Phi\, dv^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

$$\overline{ds}^2 = \cos^2\Theta\, du^2 + \operatorname{sen}^2\Theta\, dv^2 + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial w}\right)^2 dw^2$$

dell'elemento lineare dello spazio, riferito al sistema triplo ortogonale (u, v, w). Le funzioni $\Phi(u, v, w)$, $\Theta(u, v, w)$ delle tre variabili u, v, w (soluzioni della (I)) soddisfano al sistema caratteristico di equazioni a derivate parziali:

$$(a)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial u} + \frac{\partial\Theta}{\partial v} &= \cos\Theta \operatorname{sen}\Phi \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v} + \frac{\partial\Theta}{\partial u} &= -\operatorname{sen}\Theta\cos\Phi \end{aligned}\right.$$

[1] Ved. anche *Lezioni*, vol. II, § 441.

$$
(b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u\,\partial w} = \cos\Theta\cos\Phi\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial v\,\partial w} = \operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\Phi\,\dfrac{\partial\Phi}{\partial w} \end{cases}
\qquad
(c)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial u\,\partial w} = -\cos\Theta\cos\Phi\,\dfrac{\partial\Theta}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Theta}{\partial v\,\partial w} = -\operatorname{sen}\Theta\operatorname{sen}\Phi\,\dfrac{\partial\Theta}{\partial w}\,. \end{cases}
$$

Trasformiamo ora ad un tempo queste due soluzioni Φ, Θ della equazione fondamentale (I), mediante la trasformazione L_σ di Lie, nelle due nuove

$$
(1)\quad \begin{cases} \varphi(u,v,w) = \Phi\left(\dfrac{u - v\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\,,\ \dfrac{v - u\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\,,\ w\right) \\[2ex] \theta(u,v,w) = \Theta\left(\dfrac{u - v\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\,,\ \dfrac{v - u\operatorname{sen}\sigma}{\cos\sigma}\,,\ w\right). \end{cases}
$$

La soluzione $\varphi(u,v,w)$ della (I) determinerà intrinsecamente, per ogni valore di w, una corrispondente superficie pseudosferica S_φ, come analogamente la $\theta(u,v,w)$ un'altra superficie pseudosferica $\overline{S}_\theta$. Noi andiamo a verificare, conformemente a quanto abbiamo asserito al numero precedente, che le ∞^1 superficie S_φ, convenientemente collocate nello spazio, formano un sistema (Ω_σ), e medesimamente le $\overline{S}_\theta$ un altro sistema $(\overline{\Omega}_\sigma)$; vedremo inoltre che questi due sistemi (Ω_σ), $(\overline{\Omega}_\sigma)$ stanno fra loro in una relazione semplice notevole.

4. Le funzioni $\varphi(u,v,w)$, $\theta(u,v,w)$, definite dalle (1), vengono a soddisfare ad un sistema di equazioni a derivate parziali, corrispondente alle (a), (b), (c), e cioè alle seguenti:

$$
(A)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial\theta}{\partial v} = \dfrac{\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi}{\cos\sigma} \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial\theta}{\partial u} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma} \end{cases}
$$

$$
(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial w} = \dfrac{\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial v\,\partial w} = \dfrac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi}{\cos\sigma}\cdot\dfrac{\partial\varphi}{\partial w} \end{cases}
$$

$$
(C)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial w} = -\dfrac{\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi}{\cos\sigma}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial w} \\[2ex] \dfrac{\partial^2\theta}{\partial v\,\partial w} = -\dfrac{\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi}{\cos\sigma}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial w}\,. \end{cases}
$$

Ritenendo per le superficie S_φ le solite notazioni, indichiamo con

$$
(X_1, Y_1, Z_1)\ ,\ (X_2, Y_2, Z_2)\ ,\ (X_3, Y_3, Z_3)
$$

i coseni di direzione, in ogni punto (x, y, z) di S_φ, delle tre direzioni principali (tangenti alle linee di curvatura v, u e normale alla superficie). Allora, per definire la opportuna collocazione delle ∞^1 superficie S_φ nello spazio, sì che vengano a costituire un sistema (Ω_σ), troviamo il seguente sistema di equazioni:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial X_1}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} X_2 - \operatorname{sen}\varphi\, X_3 \,, \quad \frac{\partial X_1}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial v} X_2 \,, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_1}{\partial w} = \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_2 - \cos\sigma\cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_3 \,; \\
&\frac{\partial X_2}{\partial u} = -\frac{\partial \varphi}{\partial v} X_1 \,, \quad \frac{\partial X_2}{\partial v} = -\frac{\partial \varphi}{\partial u} X_1 + \cos\varphi\, X_3 \,, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_2}{\partial w} = -\operatorname{sen}\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_1 - \cos\sigma\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_3 \,; \\
&\frac{\partial X_3}{\partial u} = \operatorname{sen}\varphi\, X_1 \,, \quad \frac{\partial X_3}{\partial v} = -\cos\varphi\, X_2 \,, \\
&\qquad\qquad \frac{\partial X_3}{\partial w} = \cos\sigma\cos\theta \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_1 + \cos\sigma\operatorname{sen}\theta \frac{\partial \varphi}{\partial w} X_2 \,;
\end{aligned}\right.$$

ove omettiamo di scrivere le analoghe per Y, Z.

Si verifica subito che, soddisfacendo φ, θ alle (A), (B), (C), le (2) formano un sistema *ortogonale* illimitatamente integrabile. Ottenuti, colla integrazione del sistema (2), i nove coseni di direzione, si hanno per quadrature x, y, z dalle formule

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial u} = \cos\varphi\, X_1 \,, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{sen}\varphi\, X_2 \,, \\
&\frac{\partial x}{\partial w} = \cos\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w} \{\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\, X_1 - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\, X_2 - \cos\sigma\, X_3\} \,,
\end{aligned}\right.$$

colle analoghe per y, z, le condizioni di integrabilità essendo identicamente soddisfatte, a causa appunto delle (2) e delle (A), (B), (C).

Ora, se dalle (3) calcoliamo l'elemento lineare ds dello spazio in coordinate (u, v, w) colla formola

$$ds^2 = \mathrm{S}\, dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \,,$$

troviamo subito

$$(4)\quad \begin{aligned}
ds^2 &= \cos^2\varphi\, du^2 + \operatorname{sen}^2\varphi\, dv^2 + \cos^2\sigma \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\right)^2 dw^2 + \\
&+ 2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w}\, du\, dw - 2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial w}\, dv\, dw.
\end{aligned}$$

Questa ci dimostra che le superficie pseudosferiche S_φ, così fissate di posizione nello spazio, formano in effetto un sistema (Ω_σ), poichè:

1°) si corrispondono sulle S_φ le linee asintotiche ad eguale lunghezza d'arco (e le linee di curvatura);

2°) le trajettorie (w) dei singoli loro punti (u, v) tagliano queste superficie S_φ sotto l'angolo costante $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

5. Costruito così il primo sistema (Ω_σ) corrispondente alla soluzione φ, possiamo ora trovare l'altro $(\overline{\Omega}_\sigma)$ corrispondente alla soluzione θ, *senza alcun calcolo d'integrazione*, mediante le formole

$$\overline{x} = x - \cos\sigma\,(\cos\theta\, X_1 + \operatorname{sen}\theta\, X_2) \tag{5}$$

e analoghe per $\overline{y}, \overline{z}$, colle quali da ciascuna superficie S_φ di (Ω_σ) passiamo alla corrispondente $\overline{S}_\theta$ dell'altro sistema $(\overline{\Omega}_\sigma)$ precisamente con una trasformazione B_σ di Bäcklund. Questo dimostriamo derivando le precedenti (5) rapporto ad u, v, w, ciò che dà, avuto riguardo alle (2), (3) ed alla (A),

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{x}}{\partial u} &= \cos\theta \,\big\{(\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\, X_1 + \\
&\qquad + (\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi)\, X_2 + \cos\sigma\operatorname{sen}\varphi\, X_3\big\}\\
\frac{\partial \overline{x}}{\partial v} &= \operatorname{sen}\theta \,\big\{(\cos\theta\operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)\, X_1 + \\
&\qquad + (\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\sigma\cos\theta\cos\varphi)\, X_2 - \cos\sigma\cos\varphi\, X_3\big\}\\
\frac{\partial \overline{x}}{\partial w} &= \cos\sigma\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\,(\operatorname{sen}\theta\, X_1 - \cos\theta\, X_2),
\end{aligned}\right.$$

da cui deduciamo per $\overline{ds}^2 = S\, d\overline{x}^2$

$$(4^*)\quad \begin{aligned}
\overline{ds}^2 = \cos^2\theta\, du^2 &+ \operatorname{sen}^2\theta\, dv^2 + \cos^2\sigma\left(\frac{\partial\theta}{\partial w}\right)^2 dw^2 - \\
&- 2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\, du\, dw + \\
&+ 2\operatorname{sen}\sigma\cos\sigma\operatorname{sen}\theta\cos\varphi\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\, dv\, dw\,.
\end{aligned}$$

Questa è la (4) stessa, ove si cangi φ in θ, e θ in $\pi + \varphi$, ciò che dimostra la nostra asserzione.

Così adunque: *I due sistemi* (Ω_σ), $(\overline{\Omega}_\sigma)$ *si deducono l'uno dall'altro colla trasformazione* B_σ *di Bäcklund; li diremo sistemi coniugati.*

In particolare se si fa $\sigma = 0$, la B_σ diventa la trasformazione complementare e i due sistemi *coniugati* (Ω_σ), $(\overline{\Omega}_\sigma)$ vengono a coincidere coi due sistemi complementari di Weingarten a flessione costante (W), $(\overline{W})$.

6. Si riconoscono altre interessanti proprietà di questi sistemi (Ω_σ) studiando le trajettorie (w) dei singoli punti delle loro superficie pseudosferiche. Per la terza delle (3), l'elemento d'arco ds di queste curve è

$$ds = \cos\sigma \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw,$$

ed i coseni di direzione α, β, γ della sua tangente sono dati da

$$\alpha = \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta X_1 - \operatorname{sen}\sigma \cos\theta X_2 - \cos\sigma X_3,$$

colle analoghe per β, γ. Indichino ancora, come al solito, ξ, η, ζ i coseni di direzione della normale principale, λ, μ, ν quelli della binormale della curva stessa, infine $\frac{1}{\varrho}$ la prima curvatura, $\frac{1}{T}$ la seconda curvatura. Derivando le precedenti rapporto a w, e ricorrendo alle formole di Frenet, risulta

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{sen}\sigma \operatorname{sen}\theta X_1 - \operatorname{sen}\sigma \cos\theta X_2 - \cos\sigma X_3 \\ \xi &= \cos\theta X_1 + \operatorname{sen}\theta X_2 \\ \lambda &= \cos\sigma \operatorname{sen}\theta X_1 - \cos\sigma \cos\theta X_2 + \operatorname{sen}\sigma X_3, \end{aligned}\right.$$

colle analoghe, e successivamente

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \operatorname{tg}\sigma \frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{\frac{\partial\varphi}{\partial w}} - \frac{1}{\cos\sigma} \\ \frac{1}{T} &= \frac{\frac{\partial\theta}{\partial w}}{\frac{\partial\varphi}{\partial w}}. \end{aligned}\right.$$

Da queste ultime segue che le due curvature $\frac{1}{\varrho}, \frac{1}{T}$ sono legate dalla relazione lineare a coefficienti costanti

$$(9)\quad \frac{\operatorname{sen}\sigma}{T} - \frac{\cos\sigma}{\varrho} = 1;$$

troviamo quindi la seguente notevole proprietà:

Negli attuali sistemi (Ω_σ) *le curve* (w), *trajettorie sotto angolo costante delle superficie pseudosferiche, sono curve di Bertrand della medesima famiglia* (9).

Osserviamo che, per le (7_2), le normali principali di queste curve di Bertrand sono precisamente le congiungenti i punti corrispondenti (x, y, z), $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ di due superficie pseudosferiche corrispondenti nei sistemi coniugati (Ω_σ), $(\overline{\Omega}_\sigma)$. E poichè le trajettorie (w) del secondo sistema $(\overline{\Omega}_\sigma)$ godono della medesima proprietà, ed hanno quindi a comune le normali principali colle primitive, vediamo che:

Nei due sistemi coniugati (Ω_σ), $(\overline{\Omega}_\sigma)$ *di superficie pseudosferiche le trajettorie* (w) *dei singoli punti sono curve di Bertrand, e ciascuna coppia di curve corrispondenti nei due sistemi è formata di curve di Bertrand coniugate (aventi a comune le normali principali).*

Si osservi di più che i valori (7_3) di λ, μ, ν combinano con quelli $\overline{X}_3, \overline{Y}_3, \overline{Z}_3$ dei coseni di direzione della normale alla superficie pseudosferica $\overline{S}$ del sistema coniugato $(\overline{\Omega}_\sigma)$, e quindi:

I piani osculatori delle trajettorie (w) *del sistema* (Ω_σ), *nei punti di una superficie pseudosferica* S *del sistema, inviluppano la superficie* $\overline{S}$ *corrispondente del sistema coniugato* $(\overline{\Omega}_\sigma)$.

In fine considerando, lungo una trajettoria (w), le normali alle superficie pseudosferiche del sistema (Ω_σ), vediamo che esse sono perpendicolari ai piani osculatori della curva di Bertrand coniugata, onde la nota costruzione di Bioche per le deformate rigate dell'iperboloide rotondo ad una falda si traduce qui nel teorema:

Nel sistema (Ω_σ) *le normali alle superficie pseudosferiche nei punti d'incontro con ciascuna loro trajettoria isogonale* (w) *formano una rigata applicabile sull'iperboloide rotondo ad una falda (di semiassi* $a = \cos\sigma$, $b = \operatorname{sen}\sigma$), *e la trajettoria stessa è la deformata del circolo di gola dell'iperboloide.*

Un caso semplice delle proprietà osservate in questo numero per gli attuali sistemi (Ω_σ) si ha nei particolari sistemi considerati nel primo esempio al n. 1. Questi si ottengono dalle formole precedenti supponendo θ indipendente da w, cioè $\frac{\partial\theta}{\partial w} = 0$; allora le (8) dànno

$$\frac{1}{T} = 0 \quad , \quad \frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{\cos\sigma}$$

e dimostrano che le trajettorie (w) nel corrispondente sistema (Ω_σ) sono circoli di raggio $= \cos\sigma$. Il sistema coniugato si riduce all'unica superficie $\overline{S}$, inviluppo dei piani dei detti circoli e luogo dei loro centri, mentre le rigate considerate nell'ultimo teorema diventano altrettanti iperboloidi rotondi eguali, pei quali i detti circoli sono i rispettivi circoli di gola.

7. Abbiamo asserito, al n. 2, che anche pei sistemi (Ω_σ) la trasformazione complementare e quella di Bäcklund servono, come nel caso particolare dei sistemi (W) di Weingarten, a costruire infiniti nuovi sistemi (Ω_σ), partendo da uno noto.

Limitandoci qui pei nostri particolari sistemi (Ω_σ) a dare le formole relative alla *trasformazione complementare*, dimostreremo che, quando $\sigma \neq 0$, da ogni sistema noto (Ω_σ) si deduce una semplice infinità di nuovi sistemi (Ω'_σ) complementari di (Ω_σ), mentre per $\sigma = 0$, cioè pei sistemi di Weingarten, questi ∞^1 sistemi complementari (Ω'_σ) vengono a coincidere in uno solo [1].

Abbiasi una coppia di tali sistemi coniugati (Ω_σ), $(\overline{\Omega}_\sigma)$ corrispondenti, secondo le formole dei numeri precedenti, alle due funzioni φ, θ, legate fra loro dalle equazioni caratteristiche (A), (B), (C) n. 4. Di ciascuna superficie pseudosferica S del sistema (Ω_σ) prendasi *una* trasformata complementare S' definita dalle formole

$$(10) \qquad x' = x + \cos\varphi' X_1 + \operatorname{sen}\varphi' X_2 ,$$

dove la funzione $\varphi'(u\,.\,v\,,w)$ soddisfa alle equazioni della trasformazione complementare

$$(\alpha) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi'}{\partial u} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \cos\varphi \operatorname{sen}\varphi' \\[2ex] \dfrac{\partial\varphi'}{\partial v} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = -\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi' . \end{cases}$$

La soluzione più generale φ' della (α) contiene una funzione arbitraria di w e, volendo scegliere questa in modo che le ∞^1 superficie S' corrispondenti formino un nuovo sistema (Ω'_σ), si trova essere condizione necessaria e sufficiente che, insieme alle (α), sia soddisfatta anche l'altra

$$(\beta) \qquad \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial\varphi'}{\partial w} = [1 + \cos\sigma\cos(\varphi' - \theta)] \frac{\partial\varphi}{\partial w} .$$

Se si considera il caso generale $\sigma \neq 0$, si constata facilmente che il sistema (α), (β), a causa delle (A), (B), (C), è illimitatamente integrabile, e quindi la sua soluzione generale $\varphi'(u\,.\,v\,,w)$ contiene una costante arbitraria. Così adunque:

Ogni sistema (Ω_σ), che non sia un particolare sistema di Weingarten, dà luogo per trasformazione complementare ad ∞^1 nuovi sistemi (Ω'_σ) della medesima specie.

Il caso $\sigma = 0$ quando il sistema (Ω_σ) si riduce ad un sistema di Weingarten a flessione costante è veramente un caso singolare, ove gli ∞^1 sistemi complementari trasformati (Ω'_σ) vengono a coincidere nell'unico complementare $(\overline{W})$. La formola (β) rende appunto ragione di questa singolarità, poichè quando $\operatorname{sen}\sigma = 0$ ne risulta $\varphi' = \theta + \pi$ e le (10), riducendosi all'unica

$$x' = x - \cos\theta X_1 - \operatorname{sen}\theta X_2 ,$$

definiscono l'unico sistema complementare $(\overline{W})$.

[1] Si presenta dunque qui pei generali sistemi (Ω_σ), che non si riducono a sistemi di Weingarten, la medesima circostanza come pei sistemi di *deformate isogonali* della pseudosfera (Cfr. la mia Memoria nel tomo 18, ser. III degli Annali).

Ritornando al caso generale, osserviamo che la trasformazione complementare del sistema (Ω_σ) negli ∞^1 sistemi derivati (Ω'_σ) si può interpretare come trasformazione delle curve di Bertrand trajettorie isogonali dei rispettivi sistemi. Ad ogni tale trajettoria C nel sistema (Ω_σ) ne corrispondono ∞^1 curve trasformate C′, una per ciascun sistema (Ω'_σ). Queste ∞^1 curve di Bertrand C′ sono situate sulla superficie cerchiata luogo dei circoli di raggio $= 1$, tracciati coi centri sulla curva C nei piani osculatori della coniugata $\overline{C}$; le curve C′ sono geodetiche di questa superficie cerchiata e ne tagliano i circoli sotto l'angolo costante σ. Considerata come trasformazione delle curve di Bertrand, è questa la *trasformazione di Demartres*.

Per completare questi risultati concernenti la trasformazione complementare dei sistemi (Ω_σ) restano ancora da aggiungere le formole che, per ogni sistema trasformato (Ω'_σ), individuano il *coniugato* $(\overline{\Omega}'_\sigma)$, che corrisponderà ad una soluzione θ' della (1) legata a φ' precisamente come θ a φ. Il calcolo di θ' si eseguisce, in termini finiti, colla formola del *teorema di permutabilità*:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi-\theta'}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\sigma}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\varphi'-\theta}{2}\right); \tag{11}$$

possiamo dunque concludere:

Ogni coppia (Ω_σ), $(\overline{\Omega}'_\sigma)$ *di sistemi* Ω_σ *coniugati viene cangiata colla trasformazione complementare in una semplice infinità di tali coppie coniugate* (Ω'_σ), $(\overline{\Omega}'_\sigma)$.

Aggiungerò in fine che i risultati qui ottenuti per la trasformazione complementare sussistono analogamente per la generale trasformazione di Bäcklund dei sistemi (Ω_σ), e corrispondentemente le trasformazioni delle curve di Bertrand loro trajettorie isogonali diventano le trasformazioni trovate dal Razzaboni come generalizzazione di quella di Demartres.

Matematica. — *Sulla chiusura dei sistemi di funzioni ortogonali e dei nuclei delle equazioni integrali.* Nota del Corrispondente G. LAURICELLA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.