ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sulla commutabilità del segno* lim *col segno* integrale, *nei campi finiti*. Nota dell'ing. GIOVANNI GIORGI, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Vale un teorema, che consegue come immediata combinazione di risultati già conosciuti, ma che forse non è generalmente abbastanza noto sotto la forma definitiva che lo riassume, cioè: *In ogni campo finito, l'integrale del limite è uguale al limite dell'integrale*; in termini più particolareggiati, « Se una funzione $f_n(x)$ varia dipendentemente da un indice n, mantenendosi sempre integrabile L [1], e sempre compresa tra limiti finiti fissi (cioè indipendenti da x e da n), e se per $n=\infty$, il valore della $f_n(x)$, per ogni x fisso, tende verso quello di una funzione limite $f(x)$, allora

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b \lim_{n=\infty} f_n(x)\,dx \tag{1}$$

ciò senza esigere, nè che la convergenza della $f_n(x)$ verso il suo limite $f(x)$ avvenga uniformemente, nè che sia soddisfatta la condizione, alquanto più complessa, di Arzelà.

Nel campo degli integrali R le cose si presentano meno semplici solo pel fatto che la condizione di Arzelà (convergenza quasi uniforme in generale) [2] è necessaria (e sufficiente) per accertare che la funzione limite sia integrabile R. Siccome però gli integrali R quando esistono sono anche integrali L, resta il fatto che la formula (1) è anche allora valida almeno nel senso che se entrambi i membri hanno significato essi sono eguali.

Il teorema, sotto forma di varî enunciati equivalenti, è stato dato dal Lebesgue [3], ma con dimostrazione appena accennata. Le dimostrazioni sono state riprese da altri matematici, e soprattutto dal Borel e dal Fréchet [4] i quali hanno confermato fuori di dubbio la prima parte dell'enunciato, quella che asserisce la integrabilità L di una funzione che sia limite di una successione di funzioni integrabili L limitate nel loro insieme. In luogo della seconda parte, essi dànno altri teoremi, che dipendono l'uno dall'altro,

[1] Scriverò per brevità sempre « integrali L » per dire « integrali nel senso di Lebesgue », « integrali R » per dire « integrali nel senso di Riemann ».

[2] Ved. Arzelà, Mem. Acc. Bologna, 27 maggio 1900; la denominazione di quasi-uniforme si deve al Borel.

[3] Ved. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration* ecc. Paris, 1904, pag. 114; vedi anche la Thèse: *Intégrale, Longueur, Aire*, negli Annali di Matematica del 1902.

[4] Ved. Borel-Fréchet, *Leçons sur les fonctions de var. réelle*. Paris, 1905, pag. 48.

e da cui l'enunciato può dedursi [1]; ma l'insieme delle dimostrazioni, molto sottili e ingegnose, non si presenta ancora semplice e facile ad analizzare.

Fermiamoci dunque a questa seconda parte, che interessa egualmente gli integrali di Riemann e di Lebesgue, cioè quella che asserisce l'eguaglianza dei due membri della (1) quando essi esistono. In virtù della sua estrema generalità e importanza, vale la pena di dedicare un esame speciale alla dimostrazione.

Dicendo $R_n(x)$ il resto $f(x) - f_n(x)$ e tenendo conto che senza eccezioni l'integrale di una differenza è uguale alla differenza degli integrali [2], l'asserzione da dimostrare si riduce a questa: *Se una funzione* $R_n(x)$ *in ogni punto* x *di un intervallo finito* $a < x < b$ *tende a zero per* $n = \infty$, *e se questa funzione resta sempre in valore assoluto inferiore a una quantità fissa* M, *allora*:

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b R_n(x)\, dx = 0 \tag{2}$$

qualunque sia il modo anche non uniforme, e comunque slegato, con cui le singole ordinate della $R_n(x)$ tendono a zero.

La dimostrazione si fa dipendere dal seguente

Lemma. — Se una $R_n(x)$ tende a zero, per $n = \infty$, in ogni punto x di un intervallo finito $a < x < b$, allora, data ε positiva piccola a piacere, l'insieme dei punti dove $|R_n(x)| > \varepsilon$ ha misura di Lebesgue [3] che tende a zero col crescere di n.

Infatti, se questo lemma è vero, date ε, σ arbitrariamente piccole, purchè non nulle, si può determinare un N finito tale che per ogni $n > N$ la misura σ_1 dell'insieme dei punti (li diremo punti speciali) in cui $|R_n(x)| > \varepsilon$ sia sempre $< \sigma$. Allora si può considerare una funzione maggiorante positiva $S(x)$ che sia $= M$ (il valor limite superiore dei valori assoluti delle R_n) in essi punti speciali, e sia $= \varepsilon$ nel rimanente dell'intervallo. Questa $S(x)$ è integrabile L, e il suo integrale si sa calcolare (in base alla definizione stessa di Lebesgue), ed è

$$\int_a^b S(x)\, dx = \sigma_1 M + \varepsilon(b - a - \sigma_1) < \sigma M + \varepsilon(b - a).$$

[1] Ivi, pag. 49; vi si richiama implicitamente un teorema dimostrato a pag. 37 che è una generalizzazione di un teorema di Arzelà; e questa dimostrazione a sua volta si appoggia sopra un'altra, data a pag. 21, e che è un corollario di altra data a pag. 19, la quale si dimostra in base a varî teoremi sulla composizione degli insiemi.

[2] Postulato di definizione 3° di Lebesgue, loc. cit., pag. 98.

[3] Si suppone la funzione *misurabile* nel senso di Lebesgue; cioè dato α qualunque, l'insieme dei punti in cui $R_n(x) > \alpha$ abbia una misura di Lebesgue ben definita. Questa proprietà, per le funzioni limitate, è condizione necessaria e sufficiente per la integrabilità L. È bene ricordare che fino ad oggi non si conoscono funzioni non misurabili.

Ma l'integrale della $R_n(x)$ è in valore assoluto non superiore all'integrale della sua funzione maggiorante $S(x)$ (¹). Quindi per ogni $n > N$)

$$\left| \int_a^b R_n(x)\, dx \right| < \sigma M + \varepsilon(b-a),$$

e siccome M, a, b sono fissi. mentre σ, ε sono arbitrariamente piccole, si ricava

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b R_n(x)\, dx = 0$$

formola che essendo così provata per gli integrali di Lebesgue vale anche per quelli di Riemann quando esistono.

Questa parte della dimostrazione si può ricavare dunque semplicemente da principî fondamentali la cui portata è ben nota, e non lascia adito a difficoltà o a dubbî. Resta da vedere quella del lemma fondamentale.

Le considerazioni che sono state fatte per stabilire esso lemma fondamentale (in casi speciali da Arzelà, e più generalmente dal Borel) si possono ridurre alle seguenti.

Dato ε positivo arbitrario fisso, e continuando a chiamare *speciali* i punti in cui una generica $R_n(x)$ ha valore assoluto $> \varepsilon$, sia

σ_1 la misura dell'insieme dei punti speciali di $R_1(x)$
σ_2 " " " " $R_2(x)$
. . . .

Si tratta di dimostrare che σ_n tende verso zero col crescere indefinitamente di n.

La dimostrazione si fa per assurdo, osservando che se σ_n non tendesse verso zero, allora il più grande dei limiti di σ_n (il limite superiore d'indeterminazione secondo Du Bois Reymond) avrebbe valore > 0, e per es. $= \beta$; ciò vorrebbe dire che scelta una qualunque α inferiore a β, vi sarebbero infiniti valori di n, per cui σ_n sarebbe $> \alpha$. E allora, in virtù di un certo teorema sulla sovrapposizione degli insiemi. si arriverebbe alla conseguenza che nell'intervallo $b-a$ esisterebbe un insieme, di misura non $< \alpha$, di punti ciascuno appartenente a un'infinità degli insiemi σ_n, e cioè di punti fissi in ciascuno dei quali $R_n(x)$ non tende a zero per $n = \infty$; ciò contrariamente all'ipotesi fatta.

Il teorema sugli insiemi a cui faccio allusione è il seguente: *Se si ha su un intervallo finito $L = b - a$ un'infinità numerabile d'insiemi, ciascuno dei quali ha misura $\geq \alpha$, esiste nell'intervallo un'insieme di punti ciascuno dei quali viene ricoperto da (cioè appartiene a) un'infinità fra essi insiemi; e questo cosiddetto insieme limite completo ha misura $\geq \alpha$.*

(¹) In virtù dei postulati di definizione 3° e 4° del Lebesgue, loc. cit., pp. 98-99.

Si vede dunque che a questo teorema, in ultima analisi, si riduce il punto essenziale di tutta la dimostrazione sulla commutabilità del segno limite col segno integrale. Nonostante però l'enunciato semplice e quasi intuitivo del teorema stesso, la prova formale non è così immediata come potrebbe apparire. Il Borel infatti lo deduce (1) come conseguenza di un altro enunciato alquanto più complesso e generale (ma che può anche dedursi reciprocamente come corollario), la cui dimostrazione è piuttosto ardua a seguire, e potrebbe lasciare qualche dubbio a chi non ne facesse uno studio approfondito.

Dobbiamo perciò essere grati al prof. Orlando che con la sua abituale limpidezza ha dato nell'ultimo fascicolo di questi Rendiconti una dimostrazione del teorema in forma molto accessibile.

In vista dell'importanza della questione, mi permetterò di suggerire un procedimento di dimostrazione essenzialmente diverso, cioè non per assurdo ma per via di calcolo algebrico diretto sulla misura dell'insieme limite; e spero che non farà « double emploi » perchè permette di asserire un risultato anche sulla sovrapposizione di un numero finito di insiemi. Dimostrerò prima la formola per n finito, e poi passerò al limite per $n = \infty$.

Sia dunque un segmento di lunghezza finita L (o più generalmente un insieme di misura L). Applichiamo su di esso n insiemi, ciascuno di misura $\geqq l$.

Diciamo	U_1	la misura	dall'insieme	dei punti	coperti	1	o più	volte
"	U_2	"	"	"	"	2	"	" (2)
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
"	U_n	"		"	"	n volte		

e non vi sono punti coperti più che n volte.

Ciascuno di questi insiemi contiene il seguente; e abbiamo quindi

$$L \geqq U_1 \geqq U_2 \geqq \cdots \geqq U_n .$$

D'altra parte abbiamo manifestamente (come conseguenza del modo come gli U sono generati) che la somma degli U è uguale alla somma delle misure degli n insiemi applicati; quindi

$$U_1 + U_2 + \cdots + U_n \geqq nl .$$

Siccome qui tutti i termini sono $\leqq U_1$, e sono in numero di n, segue (sostituendo a ciascuno di essi il valore massimo U_1) che $nU_1 \geqq n$, e quindi

$$U_1 \geqq l \tag{3}$$

(1) Ved. Borel-Fréchet, op. cit., pag. 21.

(2) La misurabilità risulta da noti teoremi fondamentali nella teoria delle misure di Lebesgue.

(ciò che era d'altra parte evidente direttamente, ma che ci conviene aver dedotto per questa via).

Se ora nl non è $> L$, non si può dedurre altra diseguaglianza che ci interessi. Se invece $nl > L$, si può dal primo membro della (2) sottrarre U_1, e dal secondo sottrarre L, e dedurre

$$U_2 + U_3 + \cdots + U_n \geqq nl - L .$$

Quindi nello stesso modo come è stata dedotta la (3) si ricava

$$U_2 \geqq \frac{nl - L}{n - 1} \tag{4}$$

e questo procedimento si può continuare per tante volte quanto è il massimo intero k contenuto nel rapporto $\frac{nl}{L}$. Si ricavano cioè ordinatamente le disuguaglianze

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 \geqq l \\ U_2 \geqq \dfrac{nl - L}{n - 1} \\ U_3 \geqq \dfrac{nl - 2L}{n - 2} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ U_i \geqq \dfrac{nl - (i-1)L}{n - i + 1} \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \end{array}\right. \tag{5}$$

le quali sono in numero di $k + 1$; cioè arrivano fino al termine di indice $k + 1$. E questo è il sistema di formole che vale pel caso di n finito.

Ciò premesso, se facciamo crescere n indefinitamente con l'aggiungere sempre nuovi insiemi ciascuno di misura $\geqq l$, le U variano tutte, ma le (5) restano sempre vere; i secondi membri tendono allora tutti verso l [1], e il loro numero cresce all'infinito. Si ha quindi allora ultimamente

$$\left\{\begin{array}{l} U_1 \geqq l \\ U_2 \geqq l \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ U_i \geqq l \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \text{(e così senza limite)}. \end{array}\right. \tag{6}$$

[1] Intendo dire che ciascuno dei secondi membri, per i *fisso* (qualunque sia i), e per n indefinitamente crescente, tende verso l; ciò che però non avviene più se invece di tenere i fisso, si considera un i variabile in funzione di n, o in funzione di k; perchè appunto tale convergenza verso l non avviene con uniformità rispetto ad i; e per la validità della nostra dimostrazione non occorre che ciò sia.

Cioè abbiamo una serie di insiemi $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \ldots \supset U_i \supset \ldots$ di cui ciascuno è contenuto nel precedente; e tutti sono di misura $\geqq l$. Quindi [1] esiste un insieme U_∞ contenuto in tutti gli U_n, ed è misurabile, ed ha misura $\geqq l$. E questo è un insieme di punti ciascuno dei quali è coperto infinite volte. Dunque Il teorema è dimostrato.

Si possono così confermare con tutta generalità i teoremi relativi alle formole (1) e (2). Conviene anche aggiungere che essi valgono pure quando la convergenza delle rispettive funzioni verso il loro limite avviene *a meno di un insieme di punti di misura nulla*. L'uno e l'altro si lasciano poi anche enunciare come teoremi sulle serie [2].

La validità di tutti essi è condizionata al fatto che l'intervallo di integrazione sia finito, e la funzione da integrare sia compresa tra limiti finiti fissi (anche qui, salvo al più un insieme di punti di misura nulla). Quindi, come principio generale di analisi, si conclude che la effettiva diversità fra l'integrale di un limite e il limite di un integrale *può* solo nascere quando l'insieme delle curve rappresentative delle funzioni che si considerano ha qualche punto limite a distanza infinita; cioè in qualche modo, essa diversità è legata con la formazione di certe *funzioni impulsive*, o analoghi elementi, il cui presentarsi spiega la diversità e può misurarla; su questo argomento mi riservo di ritornare in altra occasione.

Chimica. — *Osservazioni chimico-mineralogiche su alcuni berilli elbani* [3]. Nota dell'ing. dott. L. Maddalena, presentata dal Socio G. Struever.

Osservando i valori degli indici di rifrazione di varî berilli riportati dall'Hintze [4], si nota che i medesimi aumentano coll'intensità di colorazione dei berilli stessi mostrandosi minimi per i berilli incolori dell'Elba, massimi per gli smeraldi della Siberia.

Il prof. Brugnatelli [5] richiamò l'attenzione su questo fatto avendo notato che gli indici del berillo verde oliva di Sondalo ($\omega = 1{,}5823$; $\varepsilon = 1{,}5762$ [Na]) e di quello celeste chiaro di Craveggia ($\omega = 1{,}5830$;

[1] In virtù di un teorema dato dal Lebesgue, loc. cit., pag. 109, e la cui dimostrazione è molto semplice.

[2] Veggasi un enunciato in Lebesgue, loc. cit., pag. 114, in ultimo; un altro teorema di portata diversa è stato dato da B. Levi nel 1906. L'enunciato di Lebesgue, pel caso delle funzioni integrabili R, era stato dato per la prima volta da Osgood nel 1896, ma con una restrizione che poi Hobson nel 1903 ha dimostrato superflua.

[3] Lavoro eseguito nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Pavia.

[4] Handbuch der Mineralogie, pag. 1273.

[5] *Beryll. ü. andere Mineralien der Pegmatite von Sandalo.* Zeitschr. f. Krystall. ecc. 1902.