

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Cioè abbiamo una serie di insiemi $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \dots \supset U_i \supset \dots$ di cui ciascuno è contenuto nel precedente; e tutti sono di misura $\cong l$. Quindi ⁽¹⁾ esiste un insieme U_∞ contenuto in tutti gli U_n , ed è misurabile, ed ha misura $\cong l$. E questo è un insieme di punti ciascuno dei quali è coperto infinite volte. Dunque il teorema è dimostrato.

Si possono così confermare con tutta generalità i teoremi relativi alle formole (1) e (2). Convieni anche aggiungere che essi valgono pure quando la convergenza delle rispettive funzioni verso il loro limite avviene *a meno di un insieme di punti di misura nulla*. L'uno e l'altro si lasciano poi anche enunciare come teoremi sulle serie ⁽²⁾.

La validità di tutti essi è condizionata al fatto che l'intervallo di integrazione sia finito, e la funzione da integrare sia compresa tra limiti finiti fissi (anche qui, salvo al più un insieme di punti di misura nulla). Quindi, come principio generale di analisi, si conclude che la effettiva diversità fra l'integrale di un limite e il limite di un integrale può solo nascere quando l'insieme delle curve rappresentative delle funzioni che si considerano ha qualche punto limite a distanza infinita; cioè in qualche modo, essa diversità è legata con la formazione di certe *funzioni impulsive*, o analoghi elementi, il cui presentarsi spiega la diversità e può misurarla; su questo argomento mi riservo di ritornare in altra occasione.

Chimica. — *Osservazioni chimico-mineralogiche su alcuni berilli elbani* ⁽³⁾. Nota dell'ing. dott. L. MADDALENA, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Osservando i valori degli indici di rifrazione di vari berilli riportati dall'Hintze ⁽⁴⁾, si nota che i medesimi aumentano coll'intensità di colorazione dei berilli stessi mostrandosi minimi per i berilli incolori dell'Elba, massimi per gli smeraldi della Siberia.

Il prof. Brugnatelli ⁽⁵⁾ richiamò l'attenzione su questo fatto avendo notato che gli indici del berillo verde oliva di Sondalo ($\omega = 1,5823$; $\varepsilon = 1,5762$ [Na]) e di quello celeste chiaro di Craveggia ($\omega = 1,5830$;

⁽¹⁾ In virtù di un teorema dato dal Lebesgue, loc. cit., pag. 109, e la cui dimostrazione è molto semplice.

⁽²⁾ Veggasi un enunciato in Lebesgue, loc. cit., pag. 114, in ultimo; un altro teorema di portata diversa è stato dato da B. Levi nel 1906. L'enunciato di Lebesgue, pel caso delle funzioni integrabili R, era stato dato per la prima volta da Osgood nel 1896, ma con una restrizione che poi Hobson nel 1903 ha dimostrato superflua.

⁽³⁾ Lavoro eseguito nell'Istituto Mineralogico della R. Università di Pavia.

⁽⁴⁾ Handbuch der Mineralogie, pag. 1273.

⁽⁵⁾ *Beryll. u. andere Mineralien der Pegmatite von Sandalo*. Zeitschr. f. Krystall. ecc. 1902.

$\varepsilon = 5773$ [Na]), sono notevolmente superiori agli indici dei berilli incolori dell'Elba ($\omega = 1,5770$; $\varepsilon = 1,5709$ [Na] sec. De Cloizeau).

Il Lacroix nella descrizione dei minerali provenienti dalle pegmatiti tormalinifere del Madagascar ⁽¹⁾ distinse due tipi di berillo: uno di color azzurro-verdognolo con abito normale ad indici di rifrazione pure normali, ed uno di color rosa salmone, appiattito secondo la base, avente indici molto elevati ed una densità superiore alla ordinaria. Avendo fatta fare un'analisi spettroscopica del minerale fu rivelata da questa la presenza nel secondo tipo di una quantità notevole di cesio, litio e sodio: il Lacroix ne osservò l'analogia col berillo di Hebron descritto da Penfield e Harper ⁽²⁾ assai ricco in alcali e specialmente in cesio, ed accennò alla possibilità che la modificazione delle proprietà ottiche potesse dipendere dal quantitativo in alcali contenuto.

Più tardi il Ford ⁽³⁾, raccogliendo le analisi di vari berilli americani ricchi in alcali ed aggiungendone una di un berillo di Madagascar proveniente dalla stessa località di quelli descritti da Lacroix, poté in modo sicuro stabilire che le modificazioni che presentano gli indici di rifrazione ed il peso specifico di certi berilli sono una funzione del loro contenuto in alcali.

Recentemente Lacroix e Rengade ⁽⁴⁾ ripresero lo studio dei berilli rosa (da un rosa fiore di pesco ad un rosa salmone) delle pegmatiti di Maharitra (Madagascar) analizzandoli e determinandone indici di rifrazione e densità: essi ritengono che la sostituzione della glucina avente peso molecolare basso (25,17) e quindi debole rifrazione molecolare, con alcali a peso molecolare più elevato ($\text{Li}_2\text{O} = 30,06$; $\text{Na}_2\text{O} = 62,10$; $\text{K}_2\text{O} = 94,30$; $\text{Cs}_2\text{O} = 280,76$) sia la causa dei cambiamenti nei caratteri fisici. Questi autori concludono poi, a differenza di quanto aveva prima ritenuto il solo Lacroix, che al Madagascar non vi sono due tipi distinti di berillo, ma una serie continua nella quale l'aumento della percentuale in alcali (particolarmente Li e Cs) va di pari passo col crescere della loro densità e del loro potere rifrangente.

Invece Duparc, Wunder e Sabot ⁽⁵⁾, nei loro vari studi sulle pegmatiti di Madagascar, insistono a distinguere, indipendentemente dalla colorazione, due tipi di berillo: uno prismatico allungato secondo [0001] povero di faccie e di densità poco elevata, con una bassa percentuale di alcali ed indici di rifrazioni poco superiori ai normali; un altro tipo appiattito secondo la base (0001), ricco di faccie, contenente una notevole quantità di alcali (Cs e Rb),

⁽¹⁾ Bull. de la Soc. Franc. de Minér., 1908, pag. 218-247.

⁽²⁾ Amer. Journ., t. XXVIII, 1884, pag. 250.

⁽³⁾ Amer. Journ., t. XXX, 1910, pag. 129.

⁽⁴⁾ Bull. Soc. Franc. de Minér., 1911, pag. 123.

⁽⁵⁾ Mém. Soc. Phys. Genève, t. XXXVI, 1910. Bull. Soc. Franc. de Minér., 1910, pag. 53 e 1911, pag. 131 e pag. 239.

con densità ed indici di rifrazione decisamente superiori a quelli del tipo precedente. Questi autori chiamarono il secondo tipo di berillo col nome di *woroblewite* che fu dato dal Vernadsky a berilli analoghi provenienti dalla Siberia.

Il chiar. prof. Brugnatelli mi ha gentilmente favoriti alcuni begli esemplari di berillo elbano provenienti dalle ben note pegmatiti di S. Piero in Campo, consigliandomi di eseguire uno studio comparativo delle loro proprietà fisiche e composizione chimica.

Le analisi finora eseguite dei berilli elbani (Rammelsberg ⁽¹⁾, Grattarola ⁽²⁾) non hanno rivelato la presenza in essi di alcali; solo il Bechi ⁽³⁾ vi ha determinato una notevole percentuale in cesio, ma dirò più avanti dello scarso valore che si può attribuire a questa sua analisi.

Dei campioni che avevo a mia disposizione uno era incolore e perfettamente limpido (I), il secondo pure limpido e di una tinta delicata rosa fiore di pesco (II) ed il terzo di un color celestino un po' meno limpido dei precedenti, ma sempre trasparente (III). I risultati delle analisi furono i seguenti:

	I	II	III
Si O ₂	65,09	64,39	63,90
All ₂ O ₃	17,21	20,08	18,64
Gl O	13,27	11,40	10,87
Ca O	1,02	1,06	traccie
Mg O	1,81	0,56	traccie
Cs ₂ O	—	—	traccie
K ₂ O	—	} 0,41	1,61
Na ₂ O	—		} 2,28
Li ₂ O	—		
H ₂ O	1,44	1,27	1,62
	<u>99,84</u>	<u>99,17</u>	<u>98,92</u>

In queste analisi la separazione della glucina dall'allumina fu fatta col metodo solito maggiormente consigliato dal Rose mediante il carbonato ammonico e l'ammoniaca, ritenendolo preferibile anche al metodo recentemente consigliato come ottimo da C. Renz ⁽⁴⁾ che consiste nell'aggiungere alla soluzione dei cloruri di Al e Gl una soluzione al 30 % di etil-o metilamina che rende insolubile la glucina.

(¹) Mineralchemie, 1875, pag. 650.

(²) Grot's Zeitschr., 5, pag. 503.

(³) Boll. Com. Geol., Roma, 1870.

(⁴) Ber. der deutsch. Chem. Ges., Berlin, V, 36, pag. 2751.

La determinazione degli alcali venne fatta disaggregando con Ca CO_3 e NH_4Cl secondo il metodo di Lawrence Smith. Per il campione III feci anche la separazione del potassio ottenendo la percentuale in K_2O di 1,61, ma siccome poi l'analisi spettroscopica dei prodotti della separazione rivelò la presenza del Li non solo nel filtrato, ma anche, sebbene in piccolissima quantità, unito al cloroplatinato potassico, pur ritenendo che la separazione non sia riuscita in modo perfetto, ma d'altra parte non potendo ripeterla per mancanza di materiale, ho dovuto accettare questo valore che va perciò considerato solo come approssimativo. Oltre alla linea del Li assai persistente, lo spettroscopio rivelò anche in piccola quantità, non sicura, la presenza del Cs.

Come dissi, la presenza del Cs nel berillo dell'Elba era già stata segnalata dal Bechi⁽¹⁾, il quale nel 1870 ne analizzò alcuni cristalli « squisitamente limpidi, sinceri e più o meno soavemente tinti del color d'acqua di mare ». Ecco le sue analisi:

I		II	III
Silice	70,00	Silice	60,02
Allumina	26,33	Allumina	31,07
Glucina	3,31	Magnesia	7,60
Cesio	0,88	Calce	1,14
Ossido di ferro	0,40		<hr/>
	<hr/>		99,89
	100,92		

Queste analisi si rivelano poco attendibili e tali le ritennero l'Hintze⁽²⁾ ed anche il D'Achiardi⁽³⁾, specialmente la seconda che sembra non essere di un berillo quantunque Bechi lo affermi sull'autorità del Meneghini e dica di aver ripetuto le analisi tre volte ottenendo concordanza di risultati (!). È evidente che l'A. non è riuscito a separare la glucina dall'allumina e ciò forse è dovuto al metodo usato, coll'acido solforoso, che egli dice esat-tissimo ma che, secondo Rose, conduce molto facilmente in errore.

Gli indici di rifrazione di questi berilli vennero determinati col metodo della riflessione totale mediante un apparecchio Abbe-Pulfrich sopra lamine tagliate parallelamente e normalmente all'asse ottico; inoltre per il berillo incolore e per quello celeste gli indici furono pure determinati per controllo col metodo della deviazione minima, adoperando due faccie alterne del prisma $\{10\bar{1}0\}$ opportunamente lisciate.

⁽¹⁾ Op. cit.

⁽²⁾ Loc. cit.

⁽³⁾ Mineralogia della Toscana, V. II.

I valori medi dei risultati ottenuti da numerose esperienze operando alla luce gialla del sodio furono i seguenti:

Misure per riflessione totale			
	I	II	III
$\omega =$	1,57682	1,57778	1,59169
$\varepsilon =$	1,57169	1,57269	1,58524
Misure per deviazione minima			
	I		III
$\omega =$	1,5769		1,5916
$\varepsilon =$	1,5717		1,5850

La concordanza tra le misure ottenute coi due metodi è abbastanza soddisfacente.

La densità di questi berilli fu determinata col picnometro adoperando dei frammenti perfettamente limpidi:

	I	II	III
$d =$	2,6891	2,6917	2,7639

Osservando questi risultati si mostra evidente anche per il berillo elbano la relazione tra quantitativo di alcali, indici di rifrazione e peso specifico, intuiva dal Lacroix fin dal 1908, confermata da Ford e poi da nuovi studi di Lacroix o Rengade e da quelli di Duparc, Wunder e Sabot per i berilli d'America e del Madagascar.

Ho creduto opportuno riunire in una tabella comparativa le mie analisi sul berillo Elbano, alcune dei berilli del Madagascar eseguite dagli autori citati ed una del Wells di un berillo americano, aggiungendo i rispettivi valori del peso specifico, indici di rifrazione e doppia rifrazione, e facendo risultare a parte la somma degli alcali.

Dall'esame di questa tabella risulta evidentissima la relazione tra il valore crescente della somma degli alcali e quelli pure crescenti degli indici di rifrazione, della doppia rifrazione e della densità, relazione che si verifica solo approssimativamente costante. Inoltre la tabella mostra chiaramente che non è possibile fare, nè per la composizione chimica, nè per le proprietà ottiche, nè per il valore del peso specifico, una distinzione netta tra due tipi di berillo, come vorrebbero Duparc, Wunder e Sabot, basandosi sopra tutto sulla differenza dell'abito cristallino; possiamo quindi concludere che si tratta piuttosto di una serie continua come ammisero Lacroix e Rengade.

Se osserviamo la colorazione sembra che anch'essa tenda ad aumentare di intensità unitamente alle altre proprietà fisiche, eccetto per i berilli del Maine (Hebron) i quali sono incolori⁽¹⁾: sembra quindi che la presenza di

(¹) Hintze, Handbuch d. Min., pag. 1291.

una piccola quantità di alcali possa aumentare notevolmente nei berilli il potere solvente rispetto ai pigmenti coloranti.

Ad ogni modo si ritiene che dopo le misure fatte da H. Dudenhausen degli indici di rifrazione del salgemma incolore e colorato, e quelli di E. A. Wulffing sul diamante, fluorite, quarzo, si possa considerare come dimostrata l'assoluta indipendenza tra colorazione ed indici di rifrazione (1).

Ricordando le importanti esperienze di Doelter riguardanti l'azione del radio sul colore dei minerali, ho voluto sottoporre all'azione dei raggi Röntgen (non avendo a mia disposizione quantità sufficienti di sali di radio ed essendo l'azione di questi raggi pressochè identica a quella delle radiazioni del radio, come appunto dimostrarono le esperienze di Doelter), i tre berilli dell'Elba ed altri campioni di vari colori e di diversa provenienza esistenti nel Museo dell'Istituto Mineralogico della R. Università di Pavia. Mi fu gentilmente concesso di eseguire l'esperienza nel gabinetto radiografico dell'Ospedale S. Matteo. La corrente adoperata fu quella stradale a 120 Volts trasformata da alternata in continua mediante un motore: il rocchetto dava scintille della lunghezza di 70 cm. I minerali sperimentati vennero disposti immediatamente sotto ad un tubo Müller di 20 cm. di diametro, della durezza incipiente 9 della scala di Denoise, a raffreddamento d'acqua. L'esperimento durò 10 ore, dopo le quali il tubo Müller si spezzò; l'energia della corrente variò, durante l'esperienza, da 12 a 15 Ampères.

Quantunque la durata delle esperienze e l'intensità della corrente siano state maggiori di quelle che bastarono a Doelter per ottenere in altri minerali decolorazione o mutamento di colore, non potei accertare nei miei berilli la più piccola variazione, nè la misura degli indici di rifrazione eseguita immediatamente dopo l'esperienza fu, per un valore apprezzabile, diversa da quelle eseguite prima.

Se si osservano le analisi delle tormaline che accompagnano i berilli ricchi in alcali, si riscontra che anch'esse ne contengono una quantità notevolmente superiore al normale, soprattutto di litio; così le tormaline di Orford (New Hampshire), di Paris (Maine), Mesa Grande, California (2), di Atsombato, Antaboko, Tsilaizina e Maroando (Madagascar) (3) e quelle dell'Elba (4): inoltre paragonando gli indici di rifrazione di queste tormaline si nota pure una relazione tra i loro valori e la somma degli alcali in esse contenuti, ma tale relazione è inversa a quella riscontrata per i berilli, cioè il valore degli indici delle tormaline diminuisce coll'aumentare del loro contenuto in alcali.

(1) G. Linck, *Fortschritte der Mineralogie*, ecc. Jena, 1911.

(2) Hintze, *Handbuch d. Miner.*, pag. 365.

(3) Duparc Wunder Sabot, *Mem. Soc. Phys.*, Genève, t. XXXVI, 1910.

(4) D'Achiardi, *Le tormaline del granito Elbano*. Pisa, 1896.

Località colore analista	I Elba incoloro Maddalena	II Elba rosa pallido Maddalena	III Fsilazina (Madagascar) rosa vivace Dupar, Wunder, Sabot	IV Vohyday (Madagascar) rosa salmone Lacroix e Ren- gade	V Elba celestino Maddalena	VI Hebron incoloro Wells	VII Maharitra (Madagascar) rosa violaceo Lacroix e Rengade	VIII Maharitra (Madagascar) rosa violaceo Duparc Wunder
Si O ₂	65,09	64,39	64,76	62,70	63,90	62,44	60,39	68,67
Al ₂ O ₃	17,21	20,08	18,14	30,30	18,64	17,74	29,05	17,41
Be O	13,27	11,40	13,76		10,87	11,36		11,76
Fe ₂ O ₃	—	—	—	—	—	0,40	—	—
Fe O	—	—	—	1,04	—	—	0,26	—
Mn O	—	—	0,03	traccie	—	—	traccie	—
Mg O	1,81	0,56	—	—	traccie	—	—	traccie
Ca O	1,62	1,06	—	—	traccie	—	0,34	—
Os ₂ O	—	—	—	1,43	traccie	3,60	4,56	0,87
Rb ₂ O	—	—	—	—	—	—	—	1,81
K ₂ O	—	—	0,04	—	1,61	—	—	0,68
Na ₂ O	—	0,41	0,73	1,03	2,28	1,13	0,24	2,65
Li ₂ O	—	—	0,15	0,83		2,00	1,60	2,00
H ₂ O	1,44	1,27	2,24	2,63	1,62	2,03	2,23	2,20
Somma	99,84	99,17	99,85	99,96	98,92	100,30	99,07	99,97
Somma alcali	—	0,41	0,92	3,29	3,89	6,33	6,80	6,93
Peso specif.	2,6891	2,6917	2,716	2,75	2,7639	2,80	2,81	2,8474
ω	1,57686	1,57778	1,5822	1,5860	1,59166	1,59824	1,5996	1,5974
ε	1,5716	1,57269	1,5760	1,5795	1,58512	1,59014	1,5911	1,5890
ω - ε	0,00474	0,00509	0,0062	0,0065	0,00654	0,00810	0,0085	0,0084