ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Anatomia. — *Sopra l'organo di senso laterale delle Salpidae*. Memoria del Socio F. TODARO.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle *Memorie*.

Cristallografia. — *Determinazione, col metodo della riflessione totale, dei tre indici principali di un cristallo con una sezione qualsiasi*. Nota del Corrispondente C. VIOLA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Sopra una trasformazione classica di Sophus Lie*. Nota del dott. ENRICO BOMPIANI, presentata dal Corrispondente G. CASTELNUOVO.

1. Una nota trasformazione di Sophus Lie [1] fa corrispondere ai punti di uno spazio S (x, y, z) le rette isotrope [2] di un altro spazio S′ (X, Y, Z): ai punti di S′ corrispondono in S le rette di un complesso lineare Γ.

La corrispondenza fra gli elementi nominati dei due spazî è posta analiticamente dalle formole:

$$\begin{cases} X + iY + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0 \end{cases}, \qquad (i = +\sqrt{-1});$$

il complesso Γ ha l'equazione:

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0.$$

Le proprietà più importanti della trasformazione, delle quali avremo occasione di servirci, sono raccolte nella tabella seguente:

[1] Cfr. S. Lie, *Ueber Complexe, insbesondere Linien- und Kugel-Complexe,...* Math. Ann., Bd. V, 1872, o la redazione di Lie-Scheffers nella *Geometrie der Berührungstransformationen*. Leipzig, 1896, Abschn. II, cap. 10 e 14; o infine la Nota di Cremona, *Sulla corrispondenza fra la teoria dei sistemi di rette e la teoria delle superficie*. Atti Acc. Lincei, ser. 2ª, tomo III, 1876.

[2] Cioè appoggiate all'assoluto di S′ (« Minimalgeraden » dei Tedeschi).

SPAZIO S.	SPAZIO S'.
1) Retta (e sua polare reciproca rispetto a Γ, considerate come direttrici di una congruenza lineare); retta del complesso.	Sfera (considerata come luogo dei suoi punti); sfera nulla (cono isotropo).
2) Faccetta [1] (e sua polare reciproca rispetto a Γ).	Faccetta.
3) Faccette di una superficie ω_1 (e le reciproche rispetto a Γ, formanti una superficie ω_2).	Faccette di una superficie Ω.
4) Faccetta di una superficie ω_1 considerata insieme al fascio delle tangenti ivi (e alle reciproche rispetto a Γ).	Faccetta di una superficie, considerata insieme al fascio delle sfere tangenti alla superficie nel suo punto di contatto.
5) Asintotiche su ω_1 (e sulla reciproca ω_2).	Linee di curvatura su Ω.

La proprietà enunciata in 4) fa corrispondere alle tangenti in un punto di ω_1 le sfere tangenti nel punto corrispondente di Ω; tuttavia la corrispondenza fra punti sulle due superficie subordina una corrispondenza tra i fasci di tangenti ivi. Questa sarà anzi una proiettività, e, per la proprietà 5), essa muterà l'involuzione delle tangenti determinata in un punto di ω_1 dalle tangenti asintotiche, in quella determinata dalle tangenti di curvatura nel punto corrispondente di Ω. E poichè alle linee del complesso lineare Γ su ω_1 corrispondono linee nulle su Ω, ne risulta fissata la corrispondenza fra le due involuzioni nominate.

Riassumendo:

La trasformazione di Lie fra i punti delle due superficie ω_1 e Ω pone in corrispondenza proiettiva le involuzioni delle tangenti aventi come rette doppie le tangenti asintotiche in un punto di ω_1, e rispettivamente le tangenti di curvatura nel punto corrispondente di Ω. Questa corrispondenza è tale che al doppio sistema di curve nulle su Ω corrisponde su ω_1 (e su ω_2) il sistema delle curve di Γ e il sistema ad esse coniugato (nel senso di Dupin).

È scopo della presente Nota l'assegnare una trasformazione geometrica che permetta di costruire, in termini finiti, la nominata corrispondenza fra le due involuzioni (nn. 2 e 3); e l'esporre (nn. 4 e 5) alcune proprietà di una superficie considerata in rapporto ai complessi lineari di rette nello spazio. Queste proprietà, come del resto la trasformazione stessa di Lie, sono casi particolari di teoremi più generali che formeranno oggetto di un prossimo lavoro.

[1] Locuzione adottata dal Bianchi (v. per es. Atti del IV Congr. intern. dei Matematici, vol. II, pag. 264): traduce il « Flächenelement » dei Tedeschi.

2. Si considerino le rigate contenute in Γ, tangenti ad ω_1 (e ad ω_2) secondo curve uscenti da un punto della superficie ω_1 con la stessa tangente: queste rigate hanno in comune una generatrice e, di più, sono raccordate [1] lungo essa. Le schiere quadriche (contenute in Γ) osculatrici a queste rigate lungo la generatrice comune descrivono una congruenza lineare [2] le cui direttrici sono tangenti ad ω_1 e ad ω_2 nei punti della generatrice scelta. Proviamo questo teorema per via analitica.

Le curve della superficie ω_1, $z = z(x, y)$, uscenti da un punto (x, y, z) con una tangente assegnata (curve di contatto di quelle rigate con la superficie ω_1) sono fissate ponendo $y = y(x)$, con la condizione che il valore di $y' = \dfrac{dy}{dx}$ relativo al punto fissato (x, y, z) abbia per tutte queste curve lo stesso valore (saranno invece distinti da curva a curva i valori di y'', y''', ecc.). Sia [3] (x, y, z, p, q) la faccetta in esame di ω_2; la faccetta reciproca rispetto a Γ ha le coordinate

$$\xi = -q \;,\; \eta = p \;,\; \zeta = z - xp - yq \;,\; p' = y \;,\; q' = -x \,.$$

La retta di Γ appartenente alle due faccette è definita dai punti (x, y, z), (ξ, η, ζ). Proveremo il nostro asserto mostrando che la retta di Γ congiungente i due punti:

$$\left(x + dx + \frac{1}{2}d^2x \;,\; y + dy + \frac{1}{2}d^2y \;,\; z + dz + \frac{1}{2}d^2z\right),$$

$$\left(\xi + d\xi + \frac{1}{2}d^2\xi \;,\; \eta + d\eta + \frac{1}{2}d^2\eta \;,\; \zeta + d\zeta + \frac{1}{2}d^2\zeta\right)$$

(i differenziali che compariscono in essi van calcolati prendendo x come variabile indipendente, quindi $d^2x = 0$, e servendosi delle relazioni $y = y(x)$, $z = z(x, y)$ e delle ultime scritte che dànno ξ, η, ζ) incontra la faccetta (x, y, z, p, q) in un punto $(x + \delta x \;,\; y + \delta y \;,\; \zeta + \delta\zeta)$ dipendente solo dal valore di y' e non da y'': la tangente della faccetta di ω_1 definita da $\dfrac{\delta y}{\delta x}$ sarà una delle direttrici cercate; l'altra si otterrebbe operando nello stesso modo su ω_2.

[1] Due rigate si dicono raccordate lungo una generatrice comune quando hanno gli stessi piani tangenti in tutti i punti di essa.

[2] Questa prima parte del teorema è già nota (cfr. Koenigs, *Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé.* Ann. de l'Ec. Norm. Sup., 1882 (2), tomo II). Per il nostro scopo è invece essenziale la determinazione delle direttrici della congruenza. La dimostrazione che segue include naturalmente quella del teorema di Koenigs.

[3] Le quantità $x, y, z, p, q, -1$, sono ordinatamente le coordinate del punto della faccetta, e quantità proporzionali ai coseni direttori della normale al suo piano. Per le formole riportate in questo numero, cfr. Lie-Scheffers, loc. cit., pp. 467 e 468.

La direzione $\frac{\delta y}{\delta x}$ è individuata dall'annullarsi (dei termini d'ordine più basso) del determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x+\delta x & y+\delta y & z+p\delta x+p\delta y & 1 \\ x+dx & y+dy+\frac{1}{2}d^2y & z+pdx+qdy+\frac{1}{2}d^2z & 1 \\ -\left(q+dq+\frac{1}{2}d^2q\right) & p+dp+\frac{1}{2}d^2p & \begin{array}{l} z-xp-yq-xdp-ydq- \\ -\frac{1}{2}\{dx\,dp+dy\,dq+xd^2p+yd^2q\} \end{array} & 1 \end{vmatrix}$$

e, quindi, dall'equazione

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{\delta y}{\delta x} & 0 \\ 1 & y' & \frac{1}{2}(r+2sy'+ty'^2) \\ -(q+x) & p-y & (p-y)(s+ty')-(q+x)(r+sy') \end{vmatrix} = 0$$

(p, q, r, s, t sono i simboli di Monge per indicare le derivate di z rispetto ad x e ad y).

Introduciamo la direzione

$$\overline{y}' = -\frac{r+sy'}{s+ty'}$$

coniugata (nel senso di Dupin) alla y' sulla faccetta (x, y, z, p, q) di ω_1, e la direzione

$$y'_\Gamma = \frac{y-p}{q+x}$$

della retta del complesso Γ appartenente alla faccetta. L'equazione precedente si scrive:

$$\frac{\delta y}{\delta x}y'_\Gamma + y'\cdot\overline{y}' - \frac{1}{2}\left(\frac{\delta y}{\delta x}+y'_\Gamma\right)(y'+\overline{y}') = 0;$$

essa esprime che le quattro rette della faccetta uscenti dal punto (x, y, z) nelle direzioni $\frac{\delta y}{\delta x}, y'_\Gamma, y', \overline{y}'$ formano un gruppo armonico; con una notazione abituale scriveremo la relazione che definisce $\frac{\delta y}{\delta x} = y'_\delta$:

$$(y'_\delta, y'_\Gamma, y', \overline{y}') = -1.$$

Osserviamo che in essa:

1) non è contenuto y'':

2) y' e $\overline{y}'$ hanno ufficio scambievole.

Per enunciare brevemente il risultato ottenuto diciamo *schiera quadrica osculatrice ad* ω_1 la schiera quadrica (di Γ) osculatrice ad una rigata di Γ circoscritta ad ω_1; si ha così:

Le schiere quadriche di Γ *osculatrici ad* ω_1 *secondo una stessa tangente (e ad* ω_2 *secondo la tangente reciproca) appartengono ad una congruenza lineare: due tangenti coniugate (nel senso di Dupin) dànno origine alla stessa congruenza. Una sua direttrice è coniugata armonica della retta di* Γ, *appartenente alla faccetta di* ω_1, *rispetto alle due tangenti coniugate; l'altra direttrice si ottiene operando analogamente su* ω_2.

3. Osserviamo che il teorema ora stabilito sulle schiere quadriche osculatrici alle rigate di Γ, tangenti ad ω_1, e raccordate lungo una generatrice, si muta, con la trasformazione di Lie, nel teorema di Meusnier relativo ai circoli osculatori alle curve di una superficie uscenti da un suo punto con la stessa tangente: infatti questo teorema afferma che i circoli nominati appartengono ad una sfera tangente alla superficie nel punto (che dirò sfera di Meusnier relativa alla tangente scelta). Si sa anzi di più che ogni sfera tangente alla superficie in un punto risulta sfera di Meusnier per due tangenti, simmetriche rispetto a quelle di curvatura nel punto stesso.

Siamo ora in grado di completare nel senso accennato, la trasformazione di Lie. Si parta da una coppia di tangenti coniugate (y' e $\overline{y}'$) in un punto di ω_1 (e dalle reciproche tangenti ad ω_2): ad esse, considerate in rapporto al complesso lineare Γ, il teorema precedente fa corrispondere una retta pure tangente nel punto ad ω_1, e definita dal doppio rapporto:

$$(y'_\delta, y'_\Gamma, y', \overline{y}') = -1.$$

A questa retta (e alla reciproca rispetto a Γ, tangente ad ω_2) la trasformazione di Lie fa corrispondere una sfera tangente ad Ω, che riesce sfera di Meusnier per due tangenti simmetriche rispetto a quelle di curvatura nel punto di contatto.

Diremo questa coppia di tangenti (di Ω) *corrispondente* a quella di partenza. La nostra corrispondenza pone dunque in relazione proiettiva l'involuzione delle tangenti determinata in un punto di ω_1 (e di ω_2) dalle tangenti asintotiche e quella determinata nel punto corrispondente di Ω dalle tangenti di curvatura. Ma di più, poichè la sfera di Meusnier relativa alle tangenti isotrope in un punto di Ω è il cono isotropo con vertice nel punto, ad essa corrisponde nella trasformazione di Lie la retta, tangente ad ω_1, y'_Γ; quindi $y'_\delta \equiv y'_\Gamma$ e allora y' e $\overline{y}'$ sono, per la relazione precedente, y'_Γ stessa e la direzione coniugata.

Questa trasformazione degli intorni di due punti corrispondenti è appunto determinata dalla trasformazione di Lie fra i punti stessi: perchè alla retta congiungente dei due punti infinitamente vicini di ω_1 corrisponde (con la nostra trasformazione) la retta congiungente i due punti corrispondenti su Ω.

È così stabilito di nuovo il risultato del n. 1, e di più che la corrispondenza fra le due involuzioni definite al n. 1 si può costruire geometricamente così:

Data una coppia di tangenti coniugate (*nel senso di* **Dupin**) *in un punto di* ω_1 *si costruisca la quarta armonica dopo esse e la retta ivi tangente del complesso* $\boldsymbol{\Gamma}$: *la trasformazione di Lie muta la retta costruita in una sfera, tangente ad* $\boldsymbol{\Omega}$, *che risulta sfera di Meusnier per due tangenti simmetriche rispetto a quelle di curvatura nel punto di contatto. La coppia di tangenti ottenuta corrisponde a quella di partenza nella proiettività determinata dalla trasformazione di Lie negli intorni di due punti corrispondenti di* ω_1 *e di* $\boldsymbol{\Omega}$.

E viceversa.

4. Il teorema del n. 2, nel linguaggio infinitesimale, ci dice che una tangente in un punto di ω_1 e la retta del complesso $\boldsymbol{\Gamma}$ ivi tangente ad ω_1 individuano una congruenza lineare alla quale appartengono le rette di $\boldsymbol{\Gamma}$ tangenti alla superficie nell'intorno del 1° e del 2° ordine nella direzione della tangente fissata. Ci si può domandare se alla stessa congruenza appartiene qualche retta di $\boldsymbol{\Gamma}$, tangente ad ω_1 nell'intorno del 3° ordine. Seguendo lo stesso procedimento tenuto prima, bisognerà annullare il determinante [1]:

$$\begin{vmatrix} 1 & y'_\delta & 0 \\ 1 & y' + \frac{1}{2} y'' \, dx + \frac{1}{3!} y''' \, dx^2 & \mathrm{M} \\ -(q+x) - \left(dq + \frac{1}{2} d^2q + \frac{1}{3!} d^3q\right) & p - y + dp + \frac{1}{2} d^2p + \frac{1}{3!} d^3p & \mathrm{N} \end{vmatrix}$$

(1) Il simbolo $\frac{dz}{dx}$ sta in luogo di $p + qy'$; analogamente vanno calcolati

$$\frac{d^3z}{dx^3}, \frac{d^2h}{dx^2}, \frac{d^2q}{dx^2}, \ldots$$

ove:

$$M = \frac{1}{2}(r + 2sy' + ty'^2) + \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3z}{dx^3} - qy'''\right) dx$$

$$N = (p - y)(s + ty') - (q + x)(r + sy') -$$

$$-\frac{1}{2}\left[dp + y'dq + (q + x)\frac{d^2p}{dx^2}dx - (p - y)\frac{d^2q}{dx^2}dx\right] +$$

$$+ \text{termini di } 2^\circ \text{ ordine.}$$

Si osservi però che il determinante formato con i termini finiti è identicamente nullo $\left(\text{a causa della determinazione di } y'_0 = \frac{\delta y}{\delta x}\right)$ sicchè bisognerà annullare i termini infinitesimi del 1° ordine rispetto a dx.

Senza scriverli per disteso osserviamo che:

1) In essi non figura la y''' (poichè entra solo apparentemente nel termine $\frac{d^3z}{dx^3} - qy'''$, oppure moltiplicata per infinitesimi del 2° ordine);

2°) La y'' vi comparisce linearmente;
uguagliandoli a zero si ha un'equazione differenziale lineare in y'': dunque, fissato un punto di ω_1 e una tangente ivi, esiste, in generale, una ed una sola rigata di Γ tangente ad ω_1 e tale che quattro sue generatrici consecutive si appoggiano ad una tangente di ω_1.

Conviene considerare insieme alla rigata di Γ le due falde della rigata flecnodale e i due rami della curva flecnodale [1] per enunciare in termini finiti il risultato ottenuto.

Esistono ∞^2 rigate di un complesso lineare Γ circoscritte ad una superficie ω_1 (e alla reciproca rispetto a Γ, ω_2) lungo (un ramo del =) la loro curva flecnodale: la rigata flecnodale relativa ad una di esse riesce pure tangente (con una sua falda) ad ω_1 lungo la curva stessa; una di queste (∞^2) rigate è completamente individuata da un punto di ω_1 e da una sua tangente ivi [2].

[1] Rigata flecnodale è il luogo delle tangenti quadripunte della rigata data, curva flecnodale il luogo dei punti di contatto. Cfr. Wilczynski, *Projective differential Geometry of curves and ruled surfaces*, pag. 150, Leipzig, 1906.

[2] Questo risultato è ben d'accordo con un teorema del Wilczynski, loc. cit., pag. 233: « Se in ogni punto della curva flecnodale di una rigata si considera la generatrice della superficie, la tangente quadripunta, la tangente alla curva flecnodale e la coniugata armonica di questa rispetto alle prime due, il luogo di quest'ultima retta è una sviluppabile ». Per il nostro teorema questa è la sviluppabile circosritta ad ω_1 lungo la curva flecnodale della rigata in esame (di Γ).

E tenendo conto dell'arbitrarietà del complesso Γ (variando il quale varia di conseguenza ω_2, che non ha per noi interesse) si ha pure:

Esistono ∞^7 *rigate tangenti ad una superficie* ω_1 *lungo un ramo della loro curva flecnodale e tali che le generatrici di una di esse appartengono tutte ad un medesimo complesso lineare. La rigata flecnodale di ciascuna di queste rigate è tangente (con una sua falda) ad* ω_1 *lungo la curva stessa* (¹).

5. Applicando alle rigate del penultimo enunciato la trasformazione del n. 3, si ottengono su Ω (in S') curve aventi in ogni punto la sfera osculatrice tangente ivi ad Ω. Per queste curve la sfera osculatrice ha un ufficio analogo a quello che ha il piano osculatore per le curve asintotiche; esse sono state considerate dal Darboux (²).

Meccanica. — *Sulle onde superficiali dovute a particolare conformazione del fondo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una recente Nota (³) ho caratterizzato l'intumescenza del pelo libero, in un canale scoverto abbastanza rapido, sul cui fondo è rigidamente connessa (in una determinata sezione trasversale e per tutta la larghezza) una traversa verticale.

Si tratta ora di studiare, in condizioni corrispondenti, l'andamento del pelo libero, quando sul fondo — invece di una sola traversa — abbiamo una periodica distribuzione di traverse, identiche fra loro.

È ovvio che, supposto ancor qui il regime permanente, il moto liquido ha carattere periodico: ripetendosi gli elementi del moto identicamente in punti situati sopra una medesima retta parallela al fondo ed alle sponde del canale, e distanti fra loro di λ; λ designi l'intervallo fra traversa e traversa.

(¹) Vogliamo porre a confronto anche questo teorema con un altro noto (Wilczynski, loc. cit., pag. 232): « Una curva dello spazio può esser considerata come un ramo della curva flecnodale per una famiglia di rigate dipendente da una funzione arbitraria ».

Data una curva sopra ω_1, rimane quindi determinata una rigata dalle condizioni di possedere la curva come flecnodale e di riuscire tangente alla superficie ω_1 lungo essa. Esistono, relativamente alla superficie ω_1, infinite di queste rigate, dipendenti da una funzione arbitraria (come la curva su ω_1): fra esse le ∞^7 del teorema sono caratterizzate dalla proprietà che le generatrici di ciascuna rigata appartengono ad uno stesso complesso lineare.

(²) C. R. de l'Académie des Sciences, t. LXXIII, pag. 732-736, 1871; cfr. pure Enneper, *Bemerkungen über die Differentialgleichungen*... Gött. Nachr., 1871, p. 577-583.

(³) *Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato.* Questi Rendiconti, seduta del 5 maggio 1912.