ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

E tenendo conto dell'arbitrarietà del complesso Γ (variando il quale varia di conseguenza ω_2, che non ha per noi interesse) si ha pure:

Esistono ∞^7 *rigate tangenti ad una superficie* ω_1 *lungo un ramo della loro curva flecnodale e tali che le generatrici di una di esse appartengono tutte ad un medesimo complesso lineare. La rigata flecnodale di ciascuna di queste rigate è tangente (con una sua falda) ad* ω_1 *lungo la curva stessa* (1).

5. Applicando alle rigate del penultimo enunciato la trasformazione del n. 3, si ottengono su Ω (in S') curve aventi in ogni punto la sfera osculatrice tangente ivi ad Ω. Per queste curve la sfera osculatrice ha un ufficio analogo a quello che ha il piano osculatore per le curve asintotiche; esse sono state considerate dal Darboux (2).

Meccanica. — *Sulle onde superficiali dovute a particolare conformazione del fondo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

In una recente Nota (3) ho caratterizzato l'intumescenza del pelo libero, in un canale scoverto abbastanza rapido, sul cui fondo è rigidamente connessa (in una determinata sezione trasversale e per tutta la larghezza) una traversa verticale.

Si tratta ora di studiare, in condizioni corrispondenti, l'andamento del pelo libero, quando sul fondo — invece di una sola traversa — abbiamo una periodica distribuzione di traverse, identiche fra loro.

È ovvio che, supposto ancor qui il regime permanente, il moto liquido ha carattere periodico: ripetendosi gli elementi del moto identicamente in punti situati sopra una medesima retta parallela al fondo ed alle sponde del canale, e distanti fra loro di λ; λ designi l'intervallo fra traversa e traversa.

(1) Vogliamo porre a confronto anche questo teorema con un altro noto (Wilczynski, loc. cit., pag. 232): « Una curva dello spazio può esser considerata come un ramo della curva flecnodale per una famiglia di rigate dipendente da una funzione arbitraria ».

Data una curva sopra ω_1, rimane quindi determinata una rigata dalle condizioni di possedere la curva come flecnodale e di riuscire tangente alla superficie ω_1 lungo essa. Esistono, relativamente alla superficie ω_1, infinite di queste rigate, dipendenti da una funzione arbitraria (come la curva su ω_1): fra esse le ∞^7 del teorema sono caratterizzate dalla proprietà che le generatrici di ciascuna rigata appartengono ad uno stesso complesso lineare.

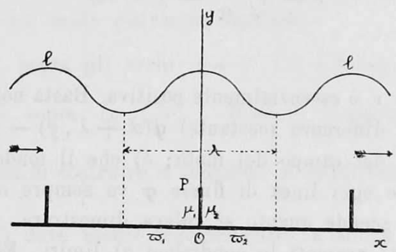
(2) C. R. de l'Académie des Sciences, t. LXXIII, pag. 732-736, 1871; cfr. pure Enneper, *Bemerkungen über die Differentialgleichungen*... Gött. Nachr., 1871, p. 577-583.

(3) *Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato.* Questi Rendiconti, seduta del 5 maggio 1912.

La questione non sembra priva di interesse: sia in virtù dei risultati semplici ed espressivi cui essa dà luogo, e che presentano una notevole analogia con quelli relativi alla classica teoria di Airy, sui moti ondosi; sia perchè su essa non disdegnarono soffermarsi menti cospicue: basti citare il nome di Lord Kelvin ([1]).

In questa Nota mi propongo di assegnare l'integrale generale del moto, trattando il problema piano irrotazionale, e supponendo il campo libero da forze. Preciserò in seguito i limiti entro cui si può ritenere valida quest'ultima ipotesi, trattando il caso particolarmente interessante che, nella teoria dei moti ondosi, fa riscontro alle cosidette *onde brevi*.

1. Indichino, al solito: u e v le componenti della velocità nel punto generico (x, y) — il sistema di riferimento è quello indicato in figura —; φ il potenziale di velocità; ψ la funzione di corrente.



Se si pone

$$(1) \qquad x + iy = z \quad , \quad u - iv = w \quad , \quad \varphi + i\psi = f,$$

w ed f sono funzioni di $z = x + iy$, legate fra loro dalla relazione

$$(2) \qquad \frac{df}{dz} = w .$$

Poniamo ulteriormente

$$(3) \qquad w = e^{-i\omega} = e^{-i(\vartheta + i\tau)} = e^{\tau - i\vartheta},$$

convenendo che, per $z = 0$ [dove $V = |w| = 0$] sia $\omega = \infty$.

Come si vede, ϑ definisce l'angolo che le linee di flusso fanno in ogni punto con l'asse x, mentre τ è il logaritmo neperiano di $V = |w|$. Notiamo

([1]) *Stationary Waves on the Surface produced by Equidistant Ridges on the Bottom.* Philosophical Magazine, vol. XXIII, 1887, pp. 52-87; oppure Math. and Physical Papers, Cambridge. University Press, 1910, vol. IV, pp. 296-302. Lord Kelvin tratta il problema *in prima approssimazione e tiene conto della gravità.* Nel suo procedimento si rivelano però dei veri acrobatismi: solo sapendo a quale possente ginnasta intellettuale essi sono dovuti, si può presumere il successo finale. Nel caso nostro, tratteremo il problema *rigoroso,* ponendoci in condizioni (che preciserò in seguito) in cui *è lecito prescindere dalla gravità.*

che ϑ va contato fra 0 e π, positivamente nel verso $x \longrightarrow y$, negativamente nell'opposto.

L'ipotesi che le traverse sieno periodicamente disposte sul fondo del canale ad intervalli di λ una dall'altra, porta come naturale conseguenza che il moto (permanente) della corrente abbia carattere periodico, con periodo λ.

Ciò viene analiticamente tradotto nella circostanza che tanto la funzione $w(z) = u(x, y) - iv(x, y)$, quanto la $\omega(z) = \vartheta(x, y) + i\tau(x, y)$ ammettono il periodo reale λ. Segue da (2) che anche la f ammette allora un periodo reale, che indicheremo con ν. A norma della (2) stessa e della (3) λ e ν sono legate fra loro dalla seguente relazione

$$\lambda = \int_0^\nu \frac{df}{w} = \int_0^\nu e^{i\omega}\, df. \tag{4}$$

È facile vedere che ν è essenzialmente positiva. Basta notare infatti: a) che ν non è altro che la differenza (costante) $\varphi(x + \lambda, y) - \varphi(x, y)$, qualunque sia il punto (x, y) del campo del moto; b) che il fondo $y = 0$ è linea di flusso; c) che lungo ogni linea di flusso φ va sempre crescendo (nel verso del flusso). Da ciò scende quanto si voleva dimostrare.

2. Giova tenere presenti le condizioni ai limiti. Esse consistono nello esprimere che tanto il fondo quanto il pelo libero l sono linee di flusso. Analiticamente questo equivale a dire che su ciascuna di esse è ψ costante. Preso $\psi = 0$ sul fondo e $\psi = \mathrm{H} > 0$ sopra l, H rappresenta, com'è ben noto, la portata della corrente.

Sopra ogni altra linea di flusso è $0 < \psi < \mathrm{H}$. Per questo e pel fatto che lungo ciascuna linea di flusso φ varia da $-\infty$ fino a $+\infty$, possiamo concludere che la $f = f(z)$ consente di rappresentare il campo del moto nella striscia $\psi = 0$, $\psi = \mathrm{H}$ del piano $f = \varphi + i\psi$. Notiamo ancora che, trattandosi di moto irrotazionale, permanente, in assenza di forze, sul pelo libero l, $\mathrm{V} = |w|$ dev'essere costante. Prendendo questa costante eguale a 1, dovremo avere, per la (3),

$$\tau = 0\,, \text{ sopra } l. \tag{5}$$

3. Poniamo ancora

$$\zeta = q e^{-i\frac{2\pi f}{\nu}}\;;\quad q = e^{-\frac{2\pi \mathrm{H}}{\nu}}\;; \tag{6}$$

con che $q < 1$.

Come facilmente si vede, ogni funzione $\omega(f)$, regolare nella striscia $0 < \psi < \mathrm{H}$ e avente per periodo ν, diviene per le (6), funzione dell'argomento ζ uniforme e regolare entro la corona circolare $q < |\zeta| < 1$.

Alla circonferenza $|\zeta| < 1$ (considerata una sola volta a partire dal punto -1, nel senso $-1, i$, ecc.) corrisponde, nel piano $z = x + iy$, la parte di pelo libero l compresa tra le verticali $x = -\frac{1}{2}\lambda$, $x = \frac{1}{2}\lambda$; mentre alla circonferenza $|\zeta| = q$ corrisponde la parte di fondo compresa tra le medesime verticali.

In modo preciso, posto

$$\zeta_1 = qe^{i\sigma_0} \quad , \quad \zeta_2 = qe^{-i\sigma_0} \qquad (0 \leq \sigma_0 \leq \pi), \tag{7}$$

agli archi $(-q, \zeta_1)$, (ζ_1, q), (q, ζ_2), $(\zeta_2, -q)$ corrispondono rispettivamente (vedi figura) $\varpi_1, \mu_1, \mu_2, \varpi_2$.

Ciò posto, riportandoci alla variabile $\zeta = \xi + i\eta$ e tenuto conto dell'andamento del fondo del canale nel tratto accennato, nonchè della (5), si ha: *la funzione* $\omega(\zeta) = \vartheta + i\tau$ *dev'essere regolare per* $q < |\zeta| < 1$; *reale per* $|\zeta| = 1$; *infine sopra la circonferenza* $|\zeta| = q$ *la sua parte reale* ϑ *deve comportarsi nel modo qui sotto indicato*:

$$\begin{cases} \vartheta = 0 \quad \text{sopra gli archi} \quad (-q, \zeta_1) \text{ e } (-q, \zeta_2); \\ \vartheta = \dfrac{\pi}{2} \quad \text{sopra} \quad (q, \zeta_1) \quad ; \quad \vartheta = -\dfrac{\pi}{2} \text{ sopra } (q, \zeta_2). \end{cases} \tag{8}$$

4. Si tratta ora di costruire la funzione ω soddisfacente a tutte le condizioni specificate.

Poichè la $\omega(\zeta)$ deve essere regolare entro la corona circolare accennata, sarà ad essa applicabile lo sviluppo del Laurent

$$\omega(\zeta) = a_0 + \sum_1^\infty {}_n (a_n \zeta^n + b_n \zeta^{-n}); \tag{9}$$

i coefficienti a e b (in generale complessi) devono rendere convergente la serie per $q < |\zeta| < 1$, e in pari tempo vanno valutati in guisa che la ω soddisfi, al contorno, alle condizioni volute. Affinchè $\omega(\zeta)$ sia reale per $|\zeta| = 1$ basta manifestamente che a_0 sia reale e che a_n e b_n sieno complessi coniugati.

Posto così $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $b_n = \alpha_n - i\beta_n$, con α_n e β_n costanti reali, la precedente espressione di $\omega(\zeta)$ soddisfa alla condizione relativa al contorno $|\zeta| = 1$.

Posto ancora in (9) $\zeta = qe^{i\sigma}$, facilmente si vede che alle (8) si soddisfa prendendo

$$a_0 = \alpha_n = 0 \quad , \quad \beta_n = \frac{\cos n\sigma_0 - 1}{n(q^n + q^{-n})}.$$

Pertanto la (9) diviene

$$\omega(\zeta) = i \sum_1^\infty {}_n \frac{\cos n\sigma_0 - 1}{n} \frac{\zeta^n - \zeta^{-n}}{q^n + q^{-n}}, \tag{9'}$$

che rappresenta l'integrale generale della nostra questione.

5. Allo sviluppo (9′) si può sostituire uno sviluppo, assai comodo, di prodotti infiniti.

Basta notare che, essendo $q<1$, si può scrivere

$$\frac{1}{q^n+q^{-n}}=\sum_1^\infty {}_j\,(-1)^j\,q^{(2j+1)n}\,;$$

e che inoltre si può sostituire a $\cos n\sigma_0$ l'equivalente espressione

$$\tfrac{1}{2}\left(e^{in\sigma_0}+e^{-in\sigma_0}\right).$$

Si ottiene così senza nessuna difficoltà il seguente sviluppo

$$(9'') \qquad \omega(\zeta)=i\log\frac{(1-q\zeta)\left(1-\dfrac{q^3}{\zeta}\right)(1-q^5\zeta)\ldots}{\left(1-\dfrac{q}{\zeta}\right)(1-q^3\zeta)\left(1-\dfrac{q^5}{\zeta}\right)\ldots}+$$

$$+\frac{i}{2}\log\frac{\left(1-2\dfrac{q}{\zeta}\cos\sigma_0+\dfrac{q^2}{\zeta^2}\right)(1-2q^3\zeta\cos\sigma_0+q^6\zeta^2)\ldots}{(1-2q\zeta\cos\sigma_0+q^2\zeta^2)\left(1-2\dfrac{q^3}{\zeta}\cos\sigma_0+\dfrac{q^6}{\zeta^2}\right)\ldots}.$$

Di questa ci varremo in una prossima Nota.

Meccanica. — *Onde brevi causate da accidentalità periodiche del fondo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Meccanica. — *Sopra le vibrazioni normali di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota di E. Laura, presentata dal Socio C. Somigliana.

Le due Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.