ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Meccanica. — *Le equazioni generali per la Statica e la Dinamica dei sistemi materiali ad n dimensioni ed a curvatura costante, nell'analisi di Grassmann.* Nota di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

1. In uno spazio ad n dimensioni ed a curvatura costante S_n, i cui punti siano riferiti, alla maniera di Grassmann, ad una piramide di $n+1$ vertici indipendenti $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ mutuamente normali, e nei loro moduli pure normali $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$, e sia perciò

$$(1)\qquad x = x_1e_1 + x_2e_2 + \cdots + x_{n+1}e_{n+1}$$

l'espressione che dà un punto qualunque x di *coordinate* $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, sarà

$$(2)\qquad (x|x) = \sum_{i=1}^{i=n+1} x_i^2(e_i|e_i) = 0\,, \text{ ovvero } \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{x_i^2}{\alpha_i^2} = 0$$

l'equazione della quadrica dei punti a modulo nullo; e noi supporremo che questa rappresenti altresì l'*assoluto* (quando proprio occorrerà servirsi della ipotesi che S_n sia ellittico o iperbolico).

Ogni punto x non giacente su quella quadrica sarà supposto a modulo unitario, finchè non risulti il contrario dal contesto del ragionamento; epperò, quando x dipende da una variabile indipendente t, sarà:

$$(3)\qquad (x|dx) = 0 \quad , \quad (dx|dx) + (x|d^2x) = 0$$

ove è (d essendo simbolo di differenziale):

$$(4)\qquad dx = dx_1 \,.\, e_1 + dx_2 \,.\, e_2 + \cdots + dx_{n+1} \,.\, e_{n+1}\,, \quad d^2x = d^2x_1 \,.\, e_1 + \cdots$$

Se, in S_n, si prende come espressione di una forza agente in un punto x il prodotto xy di x per un altro punto y, come espressione dello spostamento *elementare* dovuto ad un cambiamento di x in $x + dx$ il prodotto $x(x+dx) = xdx$, come *definizione* del *lavoro elementare* di xy nello spostamento xdx la funzione scalare

$$(5)\qquad (xy|xdx)\,,$$

che, per essere x, y nei loro moduli normali, assume la forma semplice

$$(6)\qquad \pm(y|dx)\,,$$

e se si tien conto che, negli spazî ellittici o iperbolici, per intervalli infinitamente piccoli, valgono i teoremi della geometria euclidea, si può istituire una teoria generale in S_n che contiene, per $n=3$, l'ordinaria Statica e l'ordinaria Dinamica.

2. Intanto, a parziale giustifica delle nozioni qui assunte, si osservi che, se S_n è euclideo, e per y si prende il *vettore* u della forza F applicata in x, sicchè sia $F = xu$, e se $i_1, i_2, \ldots, i_n$ sono n vettori unitarî due a due ortogonali fra loro ed e un punto arbitrario al finito di modulo 1, si potrà all'espressione (1) di x sostituire la seguente

$$x = e + x_1 i_1 + x_2 i_2 + \cdots + x_n i_n\,, \tag{7}$$

ove $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono le coordinate cartesiane ortogonali di x rispetto agli n assi $ex_1, ex_2, \ldots, ex_n$ e prendere per u l'espressione

$$u = u_1 i_1 + u_2 i_2 + \cdots + u_n i_n\,, \tag{8}$$

ove $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sono le *componenti* di u, epperò pure quelle della forza F, secondo i medesimi assi. Allora, come dalla (7) si ricava

$$dx = dx_1 \,.\, i_1 + dx_2 \,.\, i_2 + \cdots + dx_n \,.\, i_n\,, \tag{9}$$

così da (8) e (9) si ricaverà

$$\cos(u\,,\,dx) = \frac{(u|dx)}{\sqrt{(u|u)}\,\sqrt{(dx|dx)}}\;;$$

ovvero, per essere

$$(u|u) = u_1^2 + u_2^2 + \cdots + n_n^2 = F^2$$

$$(dx|dx) = dx_1^2 + dx_2^2 + \cdots + dx_n^2 = ds^2\;:$$

$$\cos(u\,,\,dx) = \cos(F\,,\,ds) = \frac{(u|dx)}{F\,ds}\,,$$

avendo messo F al posto di u, come usa farsi, ed avendo indicato con ds l'arco elementare descritto dal punto x nello spostamento dx Da tale equazione si deduce per $(u|dx)$ che, nel caso presente sostituisce la $(y|dx)$ del caso generale, la espressione

$$(u|dx) = F\,ds \,.\, \cos(F\,,\,ds)\,,$$

che è appunto quella del lavoro elementare della forza F applicata nel punto x durante lo spostamento elementare ds, nel senso dell'ordinaria Statica.

[*N. B.* La determinazione $+(y|dx)$ conviene agli spazî ellittici; nel caso di spazî iperbolici, la determinazione $+(y|dx)$ conviene a punti dello *spazio* propriamente detto, e la determinazione $-(y|dx)$ ai punti dell'*antispazio*, o *spazio ideale*].

3. Consideriamo ora un punto x in movimento; se, come avvertimmo, teniamo conto che negli spazî ellittici, e iperbolici, per intervalli infinitamente piccoli valgono i teoremi della geometria euclidea, troviamo che, supponendo $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ funzioni di una variabile t, che si dirà *tempo*, le espressioni

$$x\frac{dx}{dt}\,,\quad x\frac{d^2x}{dt^2}$$

rappresentano *completamente* la *velocità* e *l'accelerazione* del punto x al tempo t. Quanto alla velocità *come misura effettiva* del rapporto fra lo spostamento subìto dal punto x ed il tempo dt nel quale è seguìto, va distinto esplicitamente il caso in cui lo spazio è ellittico da quello in cui è iperbolico.

Per fare uno spazio ellittico si supporrà $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{n+1} = 1$; per farlo iperbolico si prenderà $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \sqrt{-1}\,,\ \alpha_{n+1} = 1$. Allora, indicando con ds l'arco elementare di traiettoria descritta dal punto x, avremo

$$\frac{ds}{\gamma} = \operatorname{sen}\frac{xdx}{\gamma} = \sqrt{(xdx|xdx)} = \sqrt{(dx|dx)} \quad \text{nel 1° caso}$$

$$\frac{ds}{\gamma} = \operatorname{senh}\frac{xdx}{\gamma} = \sqrt{-(xdx|xdx)} = \sqrt{-(dx|dx)} \quad \text{nel 2° caso.}$$

Contemporaneamente per la richiesta misura della velocità si avrà

$$v = \gamma\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\middle|\frac{dx}{dt}\right)} = \gamma\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{\partial t}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2} \tag{10}$$

nel 1° caso, e

$$v = \gamma\sqrt{-\left(\frac{dx}{dt}\middle|\frac{dx}{dt}\right)} = \tag{10'}$$

$$= \gamma\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx_{n+1}}{dt}\right)^2}$$

nel 2° caso. Per abbracciare i due casi in una sola scrittura quando non occorre tener presenti gli sviluppi effettivi, e nemmeno la diversità di significato della costante γ nelle due formule, scriveremo

$$v = \gamma\sqrt{\tau\left(\frac{dx}{dt}\middle|\frac{dx}{dt}\right)}, \tag{10''}$$

dove è stato introdotto il simbolo τ a rappresentare la differenza dei due casi.

Se m è una costante durante il moto di x che si dirà *massa* del punto x, sarà

$$(11) \qquad \mathrm{T} = \tfrac{1}{2}\, mv^2 = \frac{m\gamma^2}{2}\, \tau\left(\frac{dx}{dt}\,\Big|\,\frac{dx}{dt}\right)$$

ciò che si dirà *energia cinetica*, o *semi-forza viva*, del punto x all'istante t.

4. Se, sotto l'azione della forza xy, il punto x, supposto libero, assume un moto di accelerazione $x\,\dfrac{d^2x}{dt^2}$, si riterrà

$$(12) \qquad mx\,\frac{d^2x}{dt^2} = xy\,,$$

dalla quale segue essere

$$(13) \qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x + y\,,$$

ove λ è una costante che può essere scelta arbitrariamente.

Questa equazione conduce all'altra

$$(14) \qquad m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\Big|\,\frac{dx}{dt}\right) = (y\,|\,dx)\,,$$

la quale, per integrazione fornisce il teorema dell'equivalenza fra energia cinetica e lavoro nel moto di un punto.

5. Se il moto di x deve aver luogo con *determinati vincoli*, sotto l'azione della forza xy, al moto *libero* del punto, i vincoli offrono una *reazione*, che può essere rappresentata dal prodotto di x per un punto r, il quale dipende, oltre che dalla qualità dei vincoli, anche dalla posizione di x (vale a dire dalle $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$) ed eventualmente anche da $\dfrac{dx}{dt}$.

Il moto di x si può, dunque, considerare come il moto che avrebbe x se, essendo libero, fosse sotto l'azione della forza

$$xy + xr = x(y + r)\,,$$

epperò, per la (13)

$$(15) \qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda x + y + r\,.$$

Tenuto conto della dipendenza di r da x, si può, al posto di $\lambda x + r$ scrivere r, e presentare la (15) nella forma (di *identico contenuto*):

$$(16) \qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} = y + r\,.$$

6. Consideriamo ora due sistemi di punti: il sistema X dei punti distinti $x_1, x_2, \ldots, x_p$ ed il sistema y dei punti $y_1, y_2, \ldots, y_p$ univocamente riferiti a quei primi e tali che siano distinti, o (alcuni, o tutti), coincidenti.

Supponiamo X soggetto al sistema delle forze $x_1 y_1, x_2 y_2, \dots, x_p y_p$, ed ammettiamo il *principio delle velocità virtuali*, consistente nell'esistenza dell'equazione (δ essendo simbolo di variazione):

$$(17) \qquad (y_1|\delta x_1) + (y_2|\delta x_2) + \cdots + (y_p|\delta y_p) = 0$$

per tutti gli spostamenti $x_1 \delta x_1, x_2 \delta x_2, \dots, x_p \delta x_p$ compatibili con i vincoli del sistema X; sarà questa *l'equazione generale della Statica*.

Ammettiamo poi la estensione al caso nostro del *principio* di d'Alembert relativamente alle forze *perdute*, ed avremo nella

$$(18) \qquad \left(m_1 \frac{d^2x}{dt^2} - y_1\right)\Big| \delta x_1 + \\ + \left(m_2 \frac{d^2x}{dt^2} - y_2\right)\Big| \delta x_2 + \cdots + \left(m_p \frac{d^2x}{dt^2} - y_p\right)\Big| \delta x_p = 0$$

l'equazione generale della Dinamica.

È superfluo avvertire che le (17), (18) contengono le ordinarie equazioni generali della Statica e della Dinamica classica.

7. Tenendo conto dei vincoli, dobbiamo ora cercare come si trasformano le (17), (18).

I. Supponiamo che, in primo luogo, i vincoli siano rappresentati da un sistema di μ equazioni, in termini finiti, fra $x_1, x_2, \dots, x_p$, e siano queste

$$(19) \qquad f_h(x_{1\nu}, x_{2\nu}, \dots, x_{p\nu} \dots) = 0 \qquad (h = 1, 2, \dots, \mu).$$

Indicando con $\mathbf{G}_i f_h$ il *gradiente* della f_h (secondo una definizione data ed uno studio fatto da me in altro lavoro) *rispetto* ad

$$x_i = x_{i_1} e_1 + x_{i_2} e_2 + \cdots + x_{i,n+1} e_{n+1},$$

cioè, ponendo

$$(20) \qquad \mathbf{G}_i = \alpha_1^2 \frac{\partial}{\partial x_{i1}} e_1 + \alpha_2^2 \frac{\partial}{\partial x_{i2}} e_2 + \cdots + \alpha_{n+1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{i,n+1}} e_{n+1} \\ (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

ed operando su f_h si ha:

$$\delta f_h = \mathbf{G}_1 f_h|\delta x_1 + \mathbf{G}_2 f_h|\delta x_2 + \cdots + \mathbf{G}_\mu f_h|\delta x_p = 0$$

per $h = 1, 2, \dots, \mu$. Moltiplicando ordinatamente queste equazioni per $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\mu$ e sommando con la (17) si avrà, dopo di aver posto

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_\mu f_\mu = f;$$

$$(21) \qquad (\mathbf{G}_1 f + y_1)|\delta x_1 + (\mathbf{G}_2 f + y_2)|\delta x_2 + \cdots + (\mathbf{G}_p f + y_p)|\delta x_p = 0.$$

Ora, se determiniamo le $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ in guisa che μ delle espressioni moltiplicatrici degli $p(n+1)$ differenziali δx_{ik} $(i=1,2,\ldots,p\,;\,k=1,2,\ldots,n+1)$ si annullino, la (21) diverrà un'equazione soddisfatta da valori arbitrarii dei rimanenti $p(n+1)-\mu$ differenziali; epperò, per quei valori delle $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\mu$ dovranno essere nulli anche le corrispondenti espressioni moltiplicatrici.

Ciò equivale ad uguagliare a zero tutte le espressioni moltiplicatrici delle δx_{ik}, e poi a determinare le λ col mezzo di μ fra esse. In questa intesa, noi possiamo dunque immaginare scritta *la equazione generale della Statica* in S_n nella maniera seguente:

$$(22) \qquad \sum_{r=1}^{r=p} (G_r f + y_r) | \delta x_r = 0 .$$

Con l'enunciato delle forze perdute *l'equazione generale della Dinamica* si può allora scrivere nella forma

$$(23) \qquad \sum_{r=1}^{r=p} \left(m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} - G_r f - y_r \right) \Big| \delta x_r = 0 .$$

II. Se, invece delle (19), i vincoli fossero dati dando $x_1, x_2, \ldots, x_p$ come funzioni, in termini finiti, di un certo numero s di parametri indipendenti $q_1, q_2, \ldots, q_s$; sicchè sia, ad esempio,

$$(24) \qquad x_{ik} = \varphi_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_s)$$

$$\text{per} \quad i = 1,2,\ldots,p \quad \text{e} \quad k = 1,2,\ldots,n+1 :$$

introducendo allora un altro parametro q_{s+1}, che si dirà parametro di omogeneità con lo scrivere $q_i : q_{s+1}$ al posto di q_i $(i=1,2,\ldots,s)$ e che si farà poi eguale ad 1, vi saranno da distinguere tre casi, secondochè $s \lesseqgtr n$.

Nel terzo caso si *amplierà* l'S_n costruendo un S_s con l'aggregare alle $n+1$ unità $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ che hanno servito alla costruzione di S_n altre $s-n$ unità $e_{n+2}, e_{n+3}, \ldots, e_{s+1}$ indipendenti da quelle prime, indipendenti fra loro ed a moduli normali $\alpha_{n+2}, \alpha_{n+3}, \ldots, \alpha_{s+1}$; negli altri due casi, si indicherà con S_s lo spazio *contenuto* in S_n, o *combaciante* con S_n, individuato dalle $s+1$ unità $e_1, e_2, \ldots, e_{s+1}$.

Ciò fatto, si consideri, in S_s, il punto

$$(25) \qquad q = q_1 e_1 + q_2 e_2 + \cdots + q_{s+1} e_{s+1} ;$$

per ogni punto generico x del sistema X, si avrà

$$\delta x_r = \delta\varphi_{r1} \cdot e_1 + \delta\varphi_{r2} \cdot e_2 + \cdots + \delta\varphi_{r,n+1} \cdot e_{n+1} ,$$

da cui

$$(26)\qquad \sum_{r=1}^{r=p}(y_r|\delta x_r)=\sum_{r=1}^{r=p}\left(\frac{y_{r1}}{\alpha_1^2}\,\delta\varphi_{r1}+\frac{y_{r2}}{\alpha_2^2}\,\delta\varphi_{r2}+\cdots+\frac{y_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2}\,\delta\varphi_{r,n+1}\right).$$

Ora, è $\delta\varphi_{ri}=\mathbf{G}_q\,\varphi_{ri}|\delta q$, ove $\mathbf{G}_q$ è il simbolo di *gradiente* rispetto a q, cioè l'operatore

$$\mathbf{G}_q=\alpha_1^2\frac{\partial}{\partial q_1}e_1+\alpha_2^2\frac{\partial}{\partial q_2}e_2+\cdots+\alpha_{s+1}^2\frac{\partial}{\partial q_{s+1}}e_{s+1};$$

dunque sarà, ritenendo le y come costanti rispetto a $\mathbf{G}_q$, anche quando dipendano dalle q, e ponendo

$$(27)\qquad \frac{1}{\alpha_1^2}\sum_{r=1}^{r=p}y_{r1}\,\varphi_{r1}+\frac{1}{\alpha_2^2}\sum_{r=1}^{r=p}y_{r2}\,\varphi_{r2}+\cdots+\frac{1}{\alpha_{n+1}^2}\sum_{r=1}^{r=p}y_{r,n+1}\,\varphi_{r,n+1}=\mathrm{Q}:$$

$$(28)\qquad \sum_{r=1}^{r=p}(y_r|\delta x_r)=(\mathbf{G}_q\,\mathrm{Q}|\delta q)\,.$$

Tenendo conto della (28), scriviamo ora la (18) nella forma

$$(29)\qquad (\mathbf{G}_q\,\mathrm{Q}|\delta q)=\sum_{r=1}^{r=p}m_r\left(\frac{d^2x_r}{dt^2}\,\middle|\,\delta x_r\right),$$

e denotiamo con

$$(30)\qquad \mathrm{T}=\frac{\gamma^2}{2}\sum_{r=1}^{r=p}m_r\,\tau\left(\frac{dx_r}{dt}\,\middle|\,\frac{dx_r}{dt}\right)$$

l'*energia cinetica* del sistema X all'epoca t (le $q_1, q_2, \dots, q_{s+1}$ sono funzioni del tempo); avremo:

$$(31)\qquad (\mathbf{G}_q\,\mathrm{T}|\delta q)=\delta\mathrm{T}=\gamma^2\sum_{r=1}^{r=p}m_r\,\tau\left(\frac{dx_r}{dt}\,\middle|\,\delta\,\frac{dx_r}{dt}\right)=\gamma^2\sum_{r=1}^{r=p}m_r\,\tau\left(\frac{dx_r}{dt}\,\middle|\,\frac{d}{dt}\,\delta x_r\right).$$

Sommando, membro a membro, questa equazione con la (29), moltiplicata per $\gamma^2\tau$, avremo ancora

$$\mathbf{G}_q(\gamma^2\tau\mathrm{Q}+\mathrm{T})|\delta q=\gamma^2\sum_{r=1}^{r=p}m_r\,\tau\left[\left(\frac{d^2x_r}{dt^2}\,\middle|\,\delta x_r\right)+\left(\frac{dx_r}{dt}\,\middle|\,\frac{d}{dt}\,\delta x_r\right)\right],$$

ovvero:

$$(32)\qquad \mathbf{G}_q(\gamma^2\tau\mathrm{Q}+\mathrm{T})|\delta q=\gamma^2\,\frac{d}{dt}\sum_{r=1}^{r=p}m_r\,\tau\left(\frac{dx_r}{dt}\,|\,\delta x_r\right).$$

Introduciamo il punto

$$q'=\frac{dq}{dt}=q'_1e_1+q'_2e_2+\cdots+q'_{s+1}e_{s+1};\ \left(q'_h=\frac{dq_h}{dt},\ h=1,2,\dots s+1\right)$$

si avrà:

$$(33)\qquad \frac{dx_r}{dt} = \sum_{i=1}^{i=n+1} (\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{ri}|q')\, e_i \ldots,$$

$$(34)\qquad \delta x_r = \sum_{i=1}^{i=n+1} (\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{ri}|\delta q)\, e_i \ldots,$$

e da queste segue

$$\left(\frac{dx_r}{dt}|\delta x_r\right) = \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{1}{\alpha_i^2}(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{ri}|q')(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{ri}|\delta q),$$

ovvero:

$$(35)\quad \left(\frac{dx_r}{dt}|\delta x_r\right) = \left[(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}|q')\frac{\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}}{\alpha_1^2} + \cdots + (\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}|q')\frac{\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2}\right]|\delta q\,.$$

Dal confronto con la (32) viene

$$\mathbf{G}_q(\gamma^2\boldsymbol{\tau}\mathrm{Q} + \mathrm{T})|\delta q =$$
$$= \gamma^2\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Sigma} m_r\boldsymbol{\tau}\left[(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}|q')\frac{\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}}{\alpha_1^2} + \cdots + (\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}|q')\frac{\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2}\right]|\delta q\,;$$

e da questa poichè δq è arbitrario:

$$(36)\qquad \mathbf{G}_q(\gamma^2\boldsymbol{\tau}\mathrm{Q} + \mathrm{T}) =$$
$$= \gamma^2\frac{d}{dt}\boldsymbol{\Sigma} m_r\boldsymbol{\tau}\left[(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}|q')\frac{\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}}{\alpha_1^2} + \cdots + (\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}|q')\frac{\mathbf{G}_r\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}}{\alpha_{n+1}^2}\right].$$

Ora, dalla (30) e dalla (33) caviamo

$$(37)\quad \mathrm{T} = \frac{\gamma^2}{2}\boldsymbol{\Sigma} m_r\boldsymbol{\tau}\left[\frac{(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}|q')^2}{\alpha_1^2} + \frac{(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r2}|q')^2}{\alpha_2^2} + \cdots + \frac{(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}|q')^2}{\alpha_{n+1}^2}\right]$$

e da questa, considerando la T come funzione quadratica delle $q_1', q_2', \ldots, q_{s+1}'$

$$(38)\quad \left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_h'}\right) = \gamma^2\boldsymbol{\Sigma} m_r\boldsymbol{\tau}\left[\frac{(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}|q')}{\alpha_1^2}\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1} + \cdots + \frac{(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}|q')}{\alpha_{n+1}^2}\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}\right]|e_h$$
$$(h = 1, 2, \ldots, s+1).$$

Ne segue, indicando con $\mathbf{G}_{q'}$ il *gradiente* rispetto al punto q', cioè l'operatore

$$(39)\qquad \mathbf{G}_{q'} = \alpha_1^2\frac{\partial}{\partial q_1'}e_1 + \alpha_2^2\frac{\partial}{\partial r_2'}e_2 + \cdots + \alpha_{s+1}^2\frac{\partial}{\partial q_{s+1}'}e_{s+1}$$

che si avrà

$$(40)\quad \mathbf{G}_{q'}\mathrm{T} = \gamma^2\sum_{r=1}^{r=p} m_r\boldsymbol{\tau}\left[(\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}|q')\frac{\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r1}}{\alpha_1^2} + \cdots + (\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{r,n+1}|q')\frac{\mathbf{G}_q\,\boldsymbol{\varphi}_{rn+1}}{\alpha_{n+1}^2}\right],$$

ed allora la (41) diventa

$$(41) \qquad \mathrm{G}_q(\gamma^2\tau \mathrm{Q} + \mathrm{T}) = \frac{d}{dt}\,\mathrm{G}_{q'}\,\mathrm{T},$$

e questa *è l'equazione generale della Dinamica del sistema* X nelle condizioni supposte. Quanto all'*equazione generale della Statica* nelle medesime condizioni, dalla (28) si deduce che essa si presenta nella forma

$$(42) \qquad (\mathrm{G}_q \mathrm{Q} \,|\, \delta q) = 0\,,$$

e, per essere δq arbitrario, si riduce alla seguente

$$(43) \qquad \mathrm{G}_q \mathrm{Q} = 0\,.$$

La (41) si scinde nelle seguenti $s+1$:

$$(44) \qquad \gamma^2\tau\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q_h}\right) + \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q_h} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_h}\right) \qquad h = 1\,, 2\,, \ldots\,, s+1\,,$$

dove le parentesi per le $\left(\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial q_h}\right)$ e le $\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_h}\right)$ stanno ad indicare che le derivate vanno prese solo in quanto le $q_1\,, q_2\,, \ldots\,, q_{s+1}$ entrano nelle φ_{ri} (vedi form. 27) e le $q'_1\,, q'_2\,, \ldots\,, q'_{s+1}$ esplicitamente nella T.

Le (44) convengono ad ogni spazio nel quale una determinazione metrica conferisca al quadrato dell'elemento lineare la forma

$$ds^2 = \gamma^2\tau (dx\,|\,dx) = \gamma^2\tau \sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{dx_i^2}{\alpha_i^2}\,,$$

ove $\gamma\,, \tau\,, \alpha_i$ $(i = 1\,, 2\,, \ldots\,, n+1)$ hanno il significato dato innanzi; e sia

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_{n+1}\, e_{n+1}\,.$$

Matematica. — *Sulla teoria delle equazioni integrali generalizzate*. Nota dell'ing. GIOVANNI GIORGI, presentata dal Corrisp. G. LAURICELLA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.