

ATTI  
DELLA  
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

---

SERIE QUINTA

---

RENDICONTI

---

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

---

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

---

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

**Cristallografia.** — *Determinazione, col metodo della riflessione totale, dei tre indici principali di un cristallo con una sezione qualsiasi.* Nota del Corrispondente C. VIOLA.

Quando si colloca la sezione qualsiasi di un cristallo sul rifrattometro (p. es. quello di Abbé-Pulfrich, come il più adatto), e si determinano successivamente gli angoli della riflessione totale, avviene che si rilevano due massimi e due minimi nel giro di 180°. Siano  $A, B', B'', \Gamma$  (fig. 1) le po-

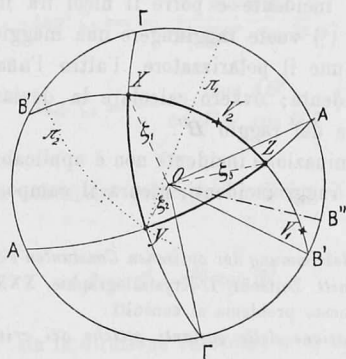


FIG. 1.

sizioni, ove hanno luogo i detti angoli particolari massimi e minimi, che vogliamo indicare rispettivamente con  $\Phi_\alpha, \Phi', \Phi'', \Phi_\gamma$ ; i due indici principali, minore  $\alpha$  e maggiore  $\gamma$ , possono essere calcolati senz'altro con le formole

$$\alpha = N \operatorname{sen} \Phi_\alpha \quad \text{e} \quad \gamma = N \operatorname{sen} \Phi_\gamma,$$

essendo  $N$  l'indice di rifrazione del mezzo isotropo, rispetto al quale ha luogo la riflessione totale del cristallo.

Per ciò che riguarda l'indice mediano  $\beta$ , il problema presenta una indecisione, poichè senza un ulteriore esame non è definito quale delle due espressioni corrisponde al vero, se:

$$\beta = \beta' = N \operatorname{sen} \Phi'$$

ovvero

$$\beta = \beta'' = N \operatorname{sen} \Phi''.$$

Per eliminare questa indecisione, e volendo risolvere il problema con una sola sezione, un solo principio è stato fino ad ora riconosciuto giusto e sufficiente: principio che io dimostrai nel 1902 <sup>(1)</sup>.

Secondo questo principio, quella delle due direzioni  $B''$  deve essere eliminata, per la quale il piano di polarizzazione è normale al piano di riflessione. Se in seguito vi furono proposte varie e varie dispute, intorno a questo metodo, esse non misero mai in discussione il principio stesso, poichè esso fu dimostrato esaurientemente, ma ebbero bensì per fine il modo di renderlo realizzabile con maggiore o minore sicurezza nell'osservazione <sup>(2)</sup>.

Io proposi di osservare il raggio riflesso con il nicol posto davanti all'oculare del rifrattometro. Ma come è noto, il piano di polarizzazione subisce una deviazione in seguito alla riflessione, e il Pockels <sup>(3)</sup> perciò propose di adottare illuminazione incidente e porre il nicol fra il cammino dei raggi incidenti. Schwietring <sup>(4)</sup> vuole raggiungere una maggiore precisione impiegando due nicols, — uno il polarizzatore, l'altro l'analizzatore, — sempre con illuminazione incidente; ovvero calcolare la deviazione che subisce il piano di polarizzazione del raggio  $B''$ .

Alle volte l'illuminazione incidente non è applicabile affatto; spesso un nicol che intercetta i raggi incidenti, oscura il campo. Due nicols, secondo

<sup>(1)</sup> C. Viola, *Die Bestimmung der optischen Constanten eines Krystalles aus einem einzingen beliebigen Schnitt*. Zeitschr. f. Krystallographie, XXXVI, 245, 1902.

Per la storia di questo problema si consulti:

C. Viola, *Sulla determinazione delle costanti ottiche dei cristalli*. Rendiconti Lincei, I, 1899.

— *Ueber die Bestimmung der optischen Constanten einer beliebigen orientirten zweiachsigem Kristallschnittes*. Zeitschr. f. Krystall., XXXI, 40, 1899.

— *Optische Studien über italienische Mineralien*. Zeitschr. f. Krystall., XXXII, 113, 1900.

— *Feldspathstudien*. Zeitschr. f. Krystall., XXXII, 305, 1900.

C. Viola, Bull. soc. mineral. franç., 25, 152, 1904.

A. Cornu, Compt. rend., 133, pag. 465.

C. Viola, *Determination des trois paramètres optiques principaux d'un cristall*. Bull. de la Société franç. de minéralogie, XXV, 147, 1902.

F. Pockels, *Lehrbuch der Kristalloptik*. Leipzig, 1906, pp. 133-202.

Fr. Schwietring, *Beiträge zur Kenntnis der partiellen und der totalen Reflexion des Lichtes an durchsichtigen inaktiven Kristallen*. Inaug. Dissert., Göttingen, 1908.

— *Eine allgemeine Methode für die eindeutige Bestimmung der drei Hauptbrechungsindizes an einem beliebigen Schnitt eines optisch zweiachsigen Kristalls*.

L. Duparc e F. Pearce, *Traité de technique minéralogique et pétrographique*. Leipzig, 1907, pag. 388-392.

<sup>(2)</sup> Fr. Schwietring, op. cit., parla di un nuovo metodo per la determinazione degli indici principali di un cristallo con una qualunque sezione. L'espressione di Schwietring non mi pare corretta, perchè si tratta effettivamente di una nuova regola per applicare lo stesso principio.

<sup>(3)</sup> F. Pockels, op. cit., pag. 133 e 202.

<sup>(4)</sup> Fr. Schwietring, op. cit.

la proposta dello Schwietring, impediscono tanto l'osservazione, che, invece di aumentare possono diminuirne, la esattezza. Un calcolo laborioso come quello proposto dallo Schwietring, farebbe abbandonare il metodo stesso.

Il principio da me stabilito per distinguere la direzione  $B''$  da quella  $B'$ , che determina l'indice  $\beta$ , può essere realizzabile in vari modi, due dei quali, i più semplici, trovano posto in questa Nota. Gli altri spero verranno riassunti in una prossima Nota.

Con le posizioni  $A, B', \Gamma$ , e i rispettivi angoli  $\widehat{\Gamma A}, \widehat{\Gamma B'}, \widehat{B'A}$  (fig. 1) si calcolano gli angoli  $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ :

$$\operatorname{tag}^2 \zeta_1 = - \frac{\cos \Gamma B'}{\cos B'A \cdot \cos \Gamma A},$$

$$\operatorname{tag}^2 \zeta_2 = - \frac{\cos \Gamma A}{\cos \Gamma B' \cdot \cos B'A},$$

$$\operatorname{tag}^2 \zeta_3 = - \frac{\cos AB'}{\cos \Gamma A \cdot \cos B'\Gamma},$$

e si costruiscono le direzioni principali ottiche  $X, Y, Z$  (i poli  $x, y, z$  nella fig. 1).

Indi si calcola

$$\beta = \beta' = N \operatorname{sen} \Phi',$$

con l'ipotesi che  $B'$  sia la direzione valevole; e si determina il semi-angolo degli assi ottici  $V$ , con l'espressione

$$\cos^2 V = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}.$$

Collocati i poli degli assi ottici  $V_1$  e  $V_2$ , si costruiscono i piani normali ad essi, e che nella fig. 1 sono rappresentati dai cerchi massimi  $\pi_1$  e  $\pi_2$ . Poichè il raggio  $B''$  deve avere per piano di polarizzazione il piano riflettente (piano del disegno), ne viene che la direzione di polarizzazione  $m m'$  giacerà in questo piano e sarà normale a  $B''$ . La direzione  $m m'$ , (fig. 2), può essere costruita adoperando del doppio decimetro, essendo che i due punti  $n, n'$  si trovano nel diametro  $m m'$  e distano egualmente dal centro  $O$ . Ovvero si calcolano gli angoli  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  mediante gli angoli dati  $\delta_1$  e  $\delta_2$ , risolvendo la relazione

$$\frac{\operatorname{sen} \varepsilon_1}{\operatorname{sen} \varepsilon_2} = \frac{\operatorname{sen} \delta_1}{\operatorname{sen} \delta_2}$$

e sapendo che  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \delta_1 + \delta_2 = 180^\circ$ .

Costruita in un modo o nell'altro la direzione  $m m'$ , il problema sarà risoluto, poichè la posizione, così tracciata, del raggio  $O B''$ , deve coincidere con quella osservata nella riflessione totale, od esservi molto prossima. Si noti che la direzione  $m m'$  è stata supposta normale al raggio  $O B''$ , mentre che, secondo la regola, il piano d'onda è perpendicolare non al raggio ma

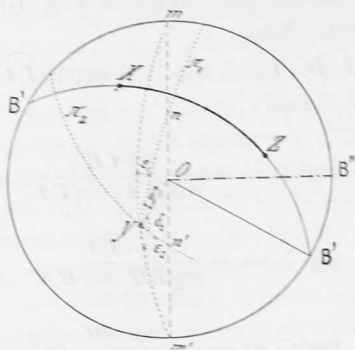


FIG. 2.

alla normale dell'onda. Ma nel caso del raggio  $B''$ , il quale si trova nel piano di incidenza con la normale, il piano d'onda di  $B''$  passerà certamente per una retta vicinissima ad  $m m'$ , e, di più, avrà il privilegio di determi-

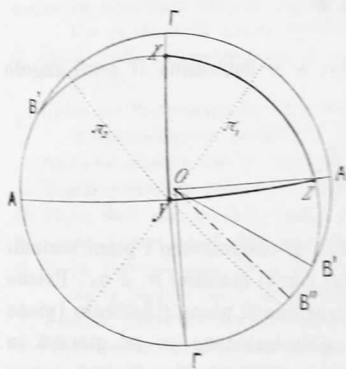


FIG. 3.

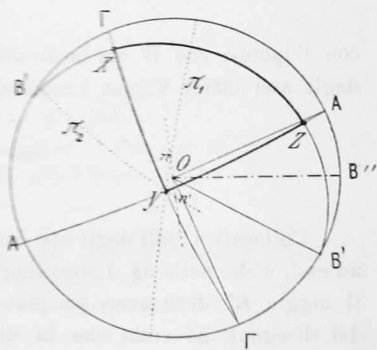


FIG. 4.

nare la direzione di polarizzazione, la quale, naturalmente, è perpendicolare al piano contenente la normale e il raggio luminoso.

Questo metodo della costruzione è pratico e sufficiente in moltissimi casi: salvo, bene inteso, il caso in cui la direzione  $B''$  cada molto prossima alla direzione  $B'$ . Esso si fonda sull'esattezza, con la quale è possibile stabilire le posizioni di  $A, B', \Gamma$ . Anche quando il piano degli assi ottici fa un angolo piccolissimo col piano riflettente (figg. 3 e 4), il metodo offre sicurezza.

Con tutto ciò, stante l'incertezza con cui, nei molti casi, è possibile stabilire le posizioni dei massimi, e minimi, si può ricorrere a un metodo che è scevro di queste incertezze ed è più pratico per la maggior parte degli osservatori.

Anche questo metodo si fonda sulla ricerca del piano di polarizzazione normale al piano di incidenza. Supponiamo di avere la sezione del cristallo a faccie parallele collocata sul piattello di un conoscopio per l'osservazione in luce convergente. La condizione che esige dal conoscopio è che tanto il condensatore quanto la lente dell'obbiettivo siano più rifrangenti del cristallo, affinché tutti i raggi con angoli di incidenza da  $0^\circ$  a  $90^\circ$  possano essere ricevuti ed osservati. Un tale conoscopio può essere realizzato facilmente mediante due semisfere, l'una da collocarsi sotto alla sezione, l'altra di sopra, con l'intercessione di un liquido molto rifrangente. Il rifrattometro stesso potrebbe funzionare da conoscopio quando avesse gli accessori di cui dà un esempio il rifrattometro di C. Klein costruito da R. Fues di Berlino (<sup>1</sup>), ovvero il rifrattometro di F. Pearce (<sup>2</sup>) costruito dalla società ginevrina per la fabbricazione degli istrumenti di fisica.

Con un tale conoscopio si vedrà l'uscita degli assi ottici, la iperbole, e le isogiri, adoperando luce monocromatica, od anche luce bianca.

Girando il preparato, nel suo piano orizzontale, gireranno i rami della iperbole intorno ai punti che rappresentano l'uscita degli assi ottici. Le direzioni di estinzione della sezione si determinano osservando il momento in cui l'uno o l'altro ramo dell'iperbole passa per il centro.

La fig. 5 dà appunto un'immagine di questo fenomeno, e presenta la sezione del cristallo in sei posizioni per rispetto ai nicols *NN* e *PP*.

Nel n. 1, la traccia del piano degli assi ottici è parallela alla direzione di uno dei nicol; girando il preparato verso destra, si ha dapprima l'immagine n. 2, dopo  $30^\circ$  di rotazione, dove uno degli assintoti dell'iperbole si avvicina al centro del campo; dopo  $60^\circ$  di rotazione, n. 3, uno degli assintoti coincide con *NN* e passa, per ciò, per il centro del campo. Nel n. 4 un ramo dell'iperbole passa per il centro, e determina perciò la posizione della sezione per l'estinzione quando i raggi luminosi sono normali alla sezione. Nel n. 6, dopo  $150^\circ$  di rotazione, la sezione è ritornata nella posizione del n. 3, quando uno dei due assintoti passa per il centro e coincide con la direzione *PP* del nicol. È evidente che nella posizione del n. 3 la direzione *B''* coincide con l'assintoto dell'iperbole il quale passa per il centro della figura, dove che la direzione *B'* è la traccia del piano degli assi ottici. In molti casi, quando cioè i due assi ottici fanno con la normale alla sezione

(<sup>1</sup>) C. Klein, *Totalreflectometer und Fernrohrmikroskop*. K. pr. Akad. d. Wiss., Berlin, 1902, pp. 104-119; C. Zeiss, *Zeitschr. f. Instrum.*, 1902, pp. 331-634; H. Rosenbusch und E. A. Wülfing, *Mikrosp. Physiographie*, Stuttgart, 1904, pag. 220.

(<sup>2</sup>) L. Duparc e F. Pearce, op. cit., pag. 410.

angoli non molto diversi, la direzione  $B''$  passa vicina a una delle due direzioni di estinzione della sezione del cristallo.

*Concludiamo dunque che, osservando il preparato in luce convergente, l'indecisione del problema qui posto è eliminata, essendo la direzione  $B''$  l'assintoto dell'iperbole che passa per il centro del campo, e diversa perciò da  $B'$  che è la traccia del piano degli assi ottici.*

Incidentalmente sia ancora rilevato che se il raggio  $B''$  è polarizzato normalmente al piano di riflessione, vi deve essere un raggio che è polarizzato nel piano di riflessione. Conducendo infatti il piano d'onda di  $B''$  pa-

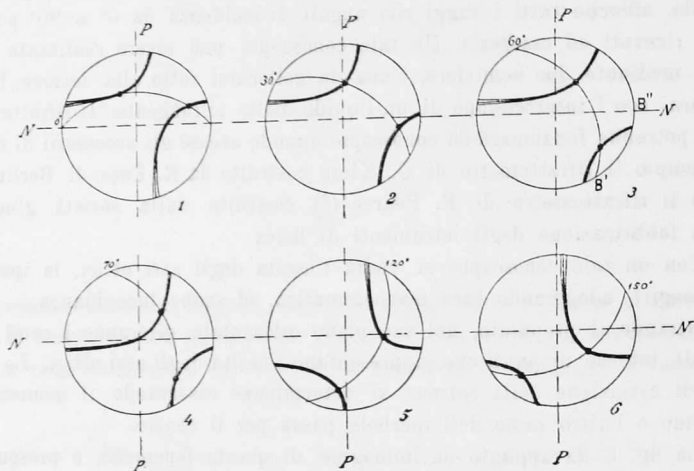


FIG. 5.

rallelamente a sè stesso fino alla tangenza con la superficie d'onda nell'altra falda, determineremo nel punto di tangenza un punto di questo raggio. Ora, stante il piccolo angolo che in generale fa il raggio con la normale alla rispettiva d'onda, questo raggio, il cui piano di polarizzazione è parallelo al piano di riflessione, sarà vicino a  $B''$ , ma non giacerà nel piano riflettente ove avviene la riflessione totale. Per avere il raggio giacente nel piano riflettente, il cui piano di polarizzazione cade nel piano di riflessione, ci si dovrà di qualche poco scostare dalla direzione  $B''$ ; ma la scostamento sarà così piccolo, che non potrà essere rilevato dalla osservazione.

Il piano d'onda di un tale raggio è normale al piano riflettente per la riflessione totale: e quindi l'angolo della riflessione totale, che chiameremo con  $\Phi_1''$ , darà senz'altro l'indice di rifrazione secondo la formola

$$n = N \text{ sen } \Phi_1'' .$$

E non sarà nemmeno difficile determinare l'angolo  $\Phi_1''$ , data la direzione di  $B_1''$ . Infatti, mentre in  $B''$  è un massimo o minimo, dovrà avvenire un

massimo di aumento nell'angolo della riflessione totale per grado di rotazione orizzontale, e press'a poco nella direzione di  $B''$ . Alcuni esempî chiariranno la questione.

La sezione (010) del periclino di Kramkogl<sup>(1)</sup> nel Rauris (Salisburgo), ha dato i seguenti angoli della riflessione totale nel vetro di Abbé con  $\log N = 0,276554$ :

Azimut sul cerchio orizzontale	CURVA INTERNA		CURVA ESTERNA	
	Angoli della riflessione totale	Aumento per 1°	Angoli della riflessione totale	Aumento per 1°
170°	54.14.48''		54.21.30''	29.4''
180	$\beta'$ 54.14.48	17.4''	54.16.36	9.0
190	54.11.54	39.0	54.15.06	0.6
198	54. 6.48	30.0	$\beta''$ 54.14.59 $\frac{1}{2}$	0.25
200	54. 5.48	15.6	54.15.00	0.12
210	54. 3.12		54.15.12	

L'aumento massimo nella curva interna, opposto a  $\beta''$ , cade propriamente intorno all'azimut orizzontale di 198°. L'angolo della riflessione totale corrispondente è 54°.6'.48''; per conseguenza, l'indice intermedio di rifrazione sarà

$$n = N \text{ sen } (54^\circ.6'.48''),$$

da cui risulta

$$\log n = 0.185135 \quad \text{ed} \quad n = 1.5316.$$

Con i dati che determinano la posizione di  $B''$  si potrebbe calcolare  $n$ , e si avrebbe così una nuova prova dell'ipotesi fatta.

Altri dati si ricavano da una sezione parallela a (001) dell'albite di Prägraten<sup>(2)</sup>.

Azimut sul cerchio orizzontale	CURVA INTERNA		CURVA ESTERNA	
	Angoli della riflessione totale	Aumento per 1°	Angoli della riflessione totale	Aumento per 1°
20°	54. 3.48''		54.14.48''	
30	54. 6. 6	13.8''	54.13.30	
37	54.10.36	38.0	$\beta''$ 54.13. 0	
40	54.12.24	41.0	54.13. 6	21.6''
50	54.13.42	7.8	54.16.42	31.5
52	$\beta'$ 54.13.42		54.17.45	30.0
60	54.13.36		54.21.42	25.2
70	54.13.36		54.25.54	

(1) C. Viola, *Feldspathstudien*. Zeitschr. f. Krystall., XXXII, pp. 305 e 331.

(2) C. Viola, op. cit., pag. 325.



Il massimo di aumento,  $41''.0$ , per  $1^\circ$  azimutale, si verifica di fronte a  $\beta''$  nella curva interna. L'angolo di  $54^\circ.10'.36''$  per cui l'aumento è massimo, può dunque essere utilizzato per il calcolo di un indice medio di rifrazione:

$$n = N \operatorname{sen} (54^\circ.10'.36'')$$

ossia  $\log n = 0.185479$  e  $n = 1.5327$ .

**Matematica.** — *Sopra un'estensione del teorema di Riesz-Fisher.* Nota I del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrispondente G. LAURICELLA.

Sia data una successione numerabile di infinite funzioni reali di una variabile reale  $x$

$$(1) \quad \Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_n(x), \dots$$

finite e continue, normali ortogonali, nell'intervallo (01)

$$(2) \quad \int_0^1 \Phi_m(x) \Phi_n(x) dx = 0 \quad m \neq n \\ = 1 \quad m = n.$$

Alle funzioni (1) facciamo corrispondere biunivocamente i numeri di una successione  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  converge, allora, secondo il teorema di Riesz-Fisher, esiste nell'intervallo (01) una funzione reale  $f(x)$  per la quale si ha

$$\int_0^1 \Phi_m(x) f(x) dx = a_m \quad , \quad \int_0^1 (f(x))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

gl'integrali essendo presi nel senso di Lebesgue (1).

Ci proponiamo nella presente Nota di dare una estensione di questo teorema, della quale dovremo fare applicazione in lavori successivi.

**1. Definizioni fondamentali.** — Diciamo  $\Omega$  l'insieme delle funzioni reali, delle variabili reali  $x, t, f(x, t)$  integrabili in senso di Lebesgue ri-

(1) Cfr. F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions.* Compt. Rendus, 1907, pag. 615; *Sur les suites de fonctions mesurables.* Id. id., 1909, pag. 1303. — E. Fisher, *Sur la convergence en moyenne.* Id. id., 1907, pag. 1022. — H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten.* Mat. Ann. Bd. 66, 1909, Seite 225. — A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.* Mat. Ann. Band. 69, 1910, Seite 331; Band. 71, 1912, Seite 38. — M. Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire,* ecc. Rend. Circolo Mat., Palermo, tomo XXX, 1910, pag. 289.