ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Il massimo di aumento, 41″,0, per 1° azimutale, si verifica di fronte a β'' nella curva interna. L'angolo di 54°.10′.36″ per cui l'aumento è massimo, può dunque essere utilizzato per il calcolo di un indice medio di rifrazione:

$$n = \mathrm{N}\ \mathrm{sen}\,(54^\circ.10'.36'')$$

$$\text{ossia} \quad \log n = 0.185479 \quad \text{e} \quad n = 1.5327\,.$$

Matematica. — *Sopra un'estensione del teorema di Riesz-Fisher.* Nota I del dott. Luigi Amoroso, presentata dal Corrispondente G. Lauricella.

Sia data una successione numerabile di infinite funzioni reali di una variabile reale x

$$(1) \qquad \Phi_1(x)\,,\ \Phi_2(x)\,,\ \ldots\ \Phi_n(x)\,,\ \ldots\ldots$$

finite e continue, normali ortogonali, nell'intervallo (01)

$$(2) \qquad \int_0^1 \Phi_m(x)\,\Phi_n(x)\,dx = 0 \qquad m \neq n$$
$$= 1 \qquad m = n\,.$$

Alle funzioni (1) facciamo corrispondere biunivocamente i numeri di una successione $a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\ a_n\,,\ \ldots$ *Se la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *converge, allora,* secondo il teorema di Riesz-Fisher, *esiste nell'intervallo* (01) *una funzione reale* $f(x)$ *per la quale si ha*

$$\int_0^1 \Phi_m(x)\,f(x)\,dx = a_m \quad , \quad \int_0^1 (f(x))^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \qquad n = 1\,,\,2\,,\ldots$$

gl'integrali essendo presi nel senso di Lebesgue [1].

Ci proponiamo nella presente Nota di dare una estensione di questo teorema, della quale dovremo fare applicazione in lavori successivi.

1. **Definizioni fondamentali.** — Diciamo Ω l'insieme delle funzioni reali, delle variabili reali $x\,,\ t\,,\ f(x\,,\ t)$ integrabili in senso di Lebesgue ri-

[1] Cfr. F. Riesz, *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions.* Compt. Rendus, 1907, pag. 615; *Sur les suites de fonctions mesurables.* Id. id., 1909, pag. 1303. — E. Fisher, *Sur la convergence en moyenne.* Id. id., 1907, pag. 1022. — H. Weyl, *Ueber die Konvergenz von Reihen die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten.* Mat. Ann. Bd. 66, 1909, Seite 225. — A. Haar, *Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme.* Mat. Ann. Band. 69, 1910, Seite 331; Band. 71, 1912, Seite 38. — M. Plancherel, *Contribution à l'étude de la représentation d'une fonction arbitraire,* ecc. Rend. Circolo Mat., Palermo, tomo XXX, 1910, pag. 289.

spetto ad x nell'intervallo (0 1), in modo che gl'integrali (in senso di Lebesgue)

$$\int_0^1 f(x, t)\, dx$$

sieno funzioni finite e continue di t per tutti i valori di t superiori ad una quantità finita t_0.

Data una successione di funzioni di Ω

$$f_1(x, t), f_2(x, t), \dots f_n(x, t), \dots \tag{3}$$

diremo che essa è *convergente in media rispetto ad x, uniformemente rispetto a t*, se detti m, h due numeri positivi, l'espressione

$$\int_0^1 \{f_{m+h}(x, t) - f_m(x, t)\}^2\, dx$$

al crescere di m *tenda, uniformemente rispetto a t, al limite zero.*

Diremo che la successione stessa *converge in media rispetto ad x, uniformemente rispetto a t, verso una funzione $f(x, t)$*, se esiste una funzione di Ω, per cui l'espressione

$$\int_0^1 \{f(x, t) - f_m(x, t)\}^2\, dx$$

al crescere di m, tenda, *uniformemente rispetto a t*, a zero.

Analogamente, data la successione di funzioni di Ω:

$$f_1(x, t), f_2(x, t), \dots, f_m(x, t), \dots$$

diremo che essa *converge uniformemente rispetto a t ed uniformemente in generale rispetto ad x*, se ad ogni numero positivo $\varepsilon < 1$ si può far corrispondere, per qualunque valore di $t \geq t_0$, un insieme $\Gamma(t)$ di punti dell'intervallo (0 1) di misura $1 - \varepsilon$, in modo che la successione considerata converga uniformemente rispetto alle variabili x e t, qualunque sia $t \geq t_0$, qualunque sia x nell'insieme $\Gamma(t)$.

Sempre nello stesso ordine di idee, diremo che una funzione $f(x, t)$ di Ω, *è determinata in generale rispetto ad x*, se ad ogni numero positivo $\varepsilon < 1$ si può far corrispondere, per qualunque valore di $t \geq t_0$, un insieme di punti dell'intervallo (0 1) di misura $1 - \varepsilon$, nel quale la funzione $f(x, t)$ è univocamente determinata.

2. Lemma. *Se le funzioni* (3) *nell'intervallo* (0 1) *convergono in media rispetto ad x, uniformemente rispetto a t, per $t \geq t_0$ esiste una funzione $f(x, t)$ di Ω, verso cui una conveniente successione, estratta dalle* (3):

$$f_{\mu_1}(x, t), f_{\mu_2}(x, t), \dots f_{\mu_n}(x, t), \dots$$

converge uniformemente rispetto a t ed uniformemente in generale rispetto

ad x. La funzione $f(x, t)$, così definita, è determinata in generale rispetto ad x.

La dimostrazione di questo lemma si fa estendendo punto per punto la dimostrazione data da Plancherel per il caso in cui manchi la variabile t. Sia $\varepsilon_m(t)$ il limite superiore degli integrali

$$\int_0^1 \{f_{m+h}(x, t) - f_m(x)\}^2 \, dx$$

per $h = 1, 2, \ldots$ Per le ipotesi fatte $\varepsilon_m(t)$, al crescere di m, tende, *uniformemente rispetto a t per $t \geq t_0$*, al limite zero. Possiamo allora estrarre dalla successione $\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \ldots$ una serie *uniformemente convergente per* $t \geq t_0$: $\varepsilon_{\mu_1}(t) + \varepsilon_{\mu_2}(t) + \cdots$ Ciò porta che, detta $l_1, l_2, \ldots$ una successione di numeri positivi tendenti a zero, e $\delta_1 + \delta_2 + \cdots$ una serie convergente a termini positivi, sarà sempre possibile determinare un indice μ_h, tale che si abbia $\sum_{n=h}^{\infty} \varepsilon_{\mu_p}(t) < \frac{1}{2} l_h \delta_h$, qualunque sia $t \geq t_0$. Ne segue (ripetendo letteralmente i ragionamenti di Plancherel (loc. cit.) dalla linea 20 della pagina 293 ove dice: « *cherchons a determiner*, ... » fino alla linea 12 della pagina 294 e cioè fino alla formula $m(A'_{h',h}) \leq \delta_h$, che non contiene più la variabile t), che esiste nell'intervallo (0 1) un insieme di punti $A_h(t)$ di misura uguale o maggiore di $1 - \delta_h$, per cui si ha:

$$|f_{\mu_p}(x, t) - f_{\mu_q}(x, t)| < 2l_h$$

per tutti i valori di p e q superiori ad un certo numero h', qualunque sia il punte x dell'insieme $A_h(t)$, qualunque sia $t > t_0$. Ma allora, detto $B_h(t)$ l'insieme formato da tutti i punti dell'intervallo (0 1) comuni a tutti gli insiemi $A_h(t), A_{h+1}(t), A_{h+2}(t), \ldots$, si avrà:

$$|f_{\mu_p}(x, t) - f_{\mu_q}(x, t)| < 2l_j \qquad p, q > j'$$

per $j = h, h+1, \ldots, j'$ avendo rispetto ad j lo stesso significato che h' rispetto ad h. Dunque la serie

$$f_{\mu_1}(x, t) + f_{\mu_2}(x, t) + \cdots$$

converge uniformemente rispetto ad ambedue le variabili x, t per ogni valore di $t \geq t_0$ e per ogni valore di x, corrispondente ad un punto dell'insieme $B_h(t)$: ma la misura di $B_h(t)$ è uguale almeno a

$$1 - (\delta_h + \delta_{h+1} + \cdots),$$

quindi è vicina a 1 tanto quanto si vuole, ecc. (vedi Plancherel, loc. cit., pp. 294, 295).

3. **Teorema.** — *Data nell'intervallo* (01) *la successione di funzioni* (1): *inoltre una successione di funzioni della variabile* t, *finite e continue per* $t \geq t_0$

$$P_1(t), P_2(t), \dots P_n(t), \dots \tag{5}$$

tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (P_n(t))^2 \tag{6}$$

converga uniformemente per tutti i valori di $t \geq t_0$, *allora esiste una serie di numeri interi positivi crescenti* $\mu_1, \mu_2, \dots$ *tali che posto*:

$$R_m(x, t) = \Phi_1(x) P_1(t) + \Phi_2(t) + \cdots + \Phi_m(x) P_m(t)$$

la serie

$$R_{\mu_1}(x, t) + (R_{\mu_2}(x, t) - R_{\mu_1}(x, t)) + \cdots \tag{7}$$

converge uniformemente rispetto a t, *per* $t \geq t_0$, *uniformemente in generale rispetto àd* x, *per* $0 \leq x \leq 1$, *verso una funzione* $F(x, t)$, *per cui si ha*:

$$\int_0^1 (F(x, t))^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(t)]^2 \quad , \quad \int_0^1 \Phi_m(x) F(x, t) dx = P_m(t) \tag{8}$$

$$m = 1, 2, \dots, t \geq t_0 .$$

Si ha infatti, detti m, h due numeri interi positivi e ricordando la posizione (7), e le (2)

$$\int_0^1 [R_{m+h}(x, t) - R_m(x, t)]^2 dx = \int_0^1 \left\{ \sum_{m+1}^{m+h}{}_\rho \Phi_\rho(x) P_\rho(t) \right\}^2 dx = \sum_{m+1}^{m+h}{}_\rho (P_\rho(t)^2 ,$$

da cui, data la convergenza uniforme della serie (6), segue immediatamente che l'espressione

$$\int_0^1 (R_{m+h}(x, t) - R_m(x, t))^2 dx$$

al crescere di m tende, uniformemente rispetto a t, per $t \geq t_0$, al limite zero. Ciò prova che le funzioni $R_1(x, t), R_2(x, t), \dots$ convergono in media rispetto ad x nell'intervallo (0 1), uniformemente rispetto a t per $t \geq t_0$, nel senso indicato al n. 1 di questa Nota; ed allora, per il lemma precedente, è possibile estrarre una successione

$$R_{\mu_1}(x, t), R_{\mu_2}(x, t), \dots$$

convergente uniformemente rispetto a t per $t \geq t_0$, ed uniformemente in generale rispetto ad x verso una funzione $F(x, t)$. Si avrà così

$$F(x, t) = \sum_{1}^{\mu_1}{}_\mu \Phi_\mu(x) P_\mu(t) + \sum_{\mu_1+1}^{\mu_2}{}_\mu \Phi_\mu(x) P_\mu(t) + \cdots \tag{9}$$

per $t \geq t_0$, per $0 \leq x \leq 1$, esclusi per ogni $t \geq t_0$ i valori di x corrispondenti ai punti di un insieme di misura nulla.

Nella (9) moltiplicando ambo i membri per $\Phi_m(x)\,dx$ ed integrando da 0 ad 1 si raccoglie:

$$\int_0^1 \Phi_m(x)\,F(x\,,t)\,dx = P_m(t) \qquad m = 1\,,2\,,\ldots \tag{10}$$

Finalmente, sempre dalla (9), moltiplicando ambo i membri per $F(x\,,t)$ ed integrando da 0 ad 1, tenuto conto delle (8), si raccoglie ancora

$$\int_0^1 \{F(x\,,t)\}^2\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} (P_m(t))^2$$

come era stato enunciato.

Matematica. — *Sulla teoria delle equazioni integrali e delle loro generalizzate.* Nota I dell'ing. Giovanni Giorgi, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. — La teoria più generale che noi conosciamo per la trattazione delle equazioni integrali è quella data recentemente dal prof. Volterra nella serie di lavori pubblicata in questi Rendiconti, dal 1909 al 1911. È una teoria che procede con mezzi molto semplici e di portata grandissima, e in fatto include la maggior parte delle altre conosciute, come caso particolare; inoltre, si applica a una categoria di problemi molto più lata, p. es. a equazioni integro-differenziali, equazioni integrali non lineari di varî tipi, ed altre equazioni funzionali di carattere molto generale. Essa è tutta fondata sulla considerazione delle *funzioni permutabili* che nella VII Nota di tale serie [1] vengono definite (§ 1, in principio) con queste parole: « Due funzioni finite « e continue $F_1(x\,,y)$ e $F_2(x\,,y)$, tali che

$$\int_x^y F_1(x\,,\xi)\,F_2(\xi\,,y)\,d\xi = \int_x^y F_2(x\,,\xi)\,F_1(\xi\,,y)\,d\xi\,, \tag{A}$$

« si diranno *permutabili*, e l'operazione precedente si dirà la loro *compo-* « *sizione*. $F_1(x\,,y)$, $F_2(x\,,y)$ si chiameranno *componenti* e l'integrale otte- « nuto *resultante* »; aggiungendo poi che la funzione *resultante* si indicherà con

$$F_1F_2(x\,,y) \quad \text{o} \quad F_2F_1(x\,,y)$$

[1] *Questioni generali sulle equazioni integrali e integro-differenziali*, Rend. Lincei, vol. XIX, serie 5ª, 1° sem., seduta del 20 febbraio 1910. È questo il lavoro classico e fondamentale di tutta la ricerca. La enunciazione più generale e la dimostrazione dei teoremi si trova poi nella XIII Nota: *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali e integro-differenziali*, ibid., vol XX, serie 5ª, 2° sem., seduta del 6 agosto 1911.