ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

per $t \geq t_0$, per $0 \leq x \leq 1$, esclusi per ogni $t \geq t_0$ i valori di x corrispondenti ai punti di un insieme di misura nulla.

Nella (9) moltiplicando ambo i membri per $\Phi_m(x)\, dx$ ed integrando da 0 ad 1 si raccoglie:

$$(10) \qquad \int_0^1 \Phi_m(x)\, F(x\,,t)\, dx = P_m(t) \qquad m = 1\,,2\,,\ldots$$

Finalmente, sempre dalla (9), moltiplicando ambo i membri per $F(x\,,t)$ ed integrando da 0 ad 1, tenuto conto delle (8), si raccoglie ancora

$$\int_0^1 \{F(x\,,t)\}^2\, dx = \sum_{m=1}^{\infty} (P_m(t))^2$$

come era stato enunciato.

Matematica. — *Sulla teoria delle equazioni integrali e delle loro generalizzate.* Nota I dell'ing. Giovanni Giorgi, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. — La teoria più generale che noi conosciamo per la trattazione delle equazioni integrali è quella data recentemente dal prof. Volterra nella serie di lavori pubblicata in questi Rendiconti, dal 1909 al 1911. È una teoria che procede con mezzi molto semplici e di portata grandissima, e in fatto include la maggior parte delle altre conosciute, come caso particolare; inoltre, si applica a una categoria di problemi molto più lata, p. es. a equazioni integro-differenziali, equazioni integrali non lineari di varî tipi, ed altre equazioni funzionali di carattere molto generale. Essa è tutta fondata sulla considerazione delle *funzioni permutabili* che nella VII Nota di tale serie [1] vengono definite (§ 1, in principio) con queste parole: « Due funzioni finite « e continue $F_1(x\,,y)$ e $F_2(x\,,y)$, tali che

$$(A) \qquad \int_x^y F_1(x\,,\xi)\, F_2(\xi\,,y)\, d\xi = \int_x^y F_2(x\,,\xi)\, F_1(\xi\,,y)\, d\xi\,,$$

« si diranno *permutabili*, e l'operazione precedente si dirà la loro *compo- « sizione*. $F_1(x\,,y)$, $F_2(x\,,y)$ si chiameranno *componenti* e l'integrale otte- « nuto *resultante* »; aggiungendo poi che la funzione *resultante* si indicherà con

$$F_1F_2(x\,,y) \quad \text{o} \quad F_2F_1(x\,,y)$$

[1] *Questioni generali sulle equazioni integrali e integro-differenziali,* Rend. Lincei, vol. XIX, serie 5ª, 1° sem., seduta del 20 febbraio 1910. È questo il lavoro classico e fondamentale di tutta la ricerca. La enunciazione più generale e la dimostrazione dei teoremi si trova poi nella XIII Nota: *Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali e integro-differenziali,* ibid., vol XX, serie 5ª, 2° sem., seduta del 6 agosto 1911.

o più semplicemente con F_1F_2, o F_2F_1, quando non possa nascere confusione col prodotto delle due funzioni.

Lo sviluppo della teoria consiste nel mostrare che questo prodotto simbolico si può trattare sotto molti punti di vista come un prodotto ordinario; donde anche l'ulteriore notazione $F^2(x, y)$ per indicare il risultato della composizione di una $F(x, y)$ con se stessa; e più in generale la definizione di potenza $F^n(x, y)$. Ne segue un'algebra che conduce a scrivere equazioni simboliche tra funzioni permutabili, a risolverle per serie di potenze intere, e poi, traducendo equazione e serie in forma spoglia di simboli, a ricavare insieme un'equazione funzionale e la sua risolvente espressa per mezzo di serie di integrali, *illimitatamente convergente*.

2. — Il modo come si presentano e si ricollegano fra loro queste definizioni e le varie proposizioni della teoria, lascia intravedere che tutto non derivi solo da un elegante e geniale artificio (la cui origine si troverebbe del resto chiaramente esposta, e con molta generalità, nella XIII Nota citata testè); ma si possa forse anche renderne conto, e darne un filo conduttore riattaccandosi alle teorie generali che si posseggono sulle operazioni funzionali lineari. Ciò darebbe da una parte il mezzo di ricavare *ex-novo* formalmente (cioè senza le dimostrazioni) le formole del Volterra, anche per chi non ne ricordasse i passaggi; e dall'altra mostrerebbe come l'intera trattazione si traduca anche e si risolva (benche scritta in apparenza sotto altra veste) in un capitolo importantissimo di calcolo operativo funzionale. Sarebbe un capitolo tanto più desiderato, in quanto che in questo ramo di matematica si hanno bensì molteplici teorie ed esempî pratici, ma non collegati abbastanza fra loro, e solo lo studio di teorie completamente sviluppate relative a casi singoli — come sarebbe quella di cui parliamo — può fornire il collegamento richiesto.

A prima vista, bisogna però riconoscere che la voluta traduzione non si presenta immediata; perchè la (A) fa pensare a un campo funzionale di funzioni con due variabili indipendenti, che entrambe vengano in giuoco nelle trasformazioni funzionali, con la ulteriore complicazione del loro intervento nei limiti delle integrazioni; e per questa via non si perviene a interpetrare utilmente la (A) e a rendersi conto dell'algoritmo che da essa dipende. Qualche dissimmetria di notazione che ha incontrato il Volterra (p. es. nelle prime righe della pag. 171 della citata Nota VII) si ricollegherebbe forse indirettamente a questo punto di vista. Mi propongo qui di esporre un metodo, per mezzo del quale, risalendo qualche passo indietro dalla equazione (A), e ricollegando le $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ a trasformazioni eseguite nel campo delle funzioni a una variabile indipendente, si perviene alla traduzione funzionale in forma abbastanza diretta.

3. — Sia $\varphi(x)$ un'arbitraria funzione integrabile. Sia $F(x, y)$ una funzione, che per semplicità supporremo limitata e continua in tutti i punti *interni* di una regione finita del piano ([1]), e nulla al di fuori. La formola

$$(1) \qquad \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x, y)\, \varphi(y)\, dy$$

definisce un'operazione che trasforma $\varphi(x)$ in $\psi(x)$. Indicando questa operazione con $\dot{F}$, scriveremo

$$(2) \qquad \psi(x) = \dot{F}\varphi(x),$$

e diremo che $F(x, y)$ è la *funzione coefficiente* dell'operatore $\dot{F}$.

Per la sua struttura, $\dot{F}$ è un operatore funzionale distributivo (lineare). È noto ([2]) come per siffatti operatori, trattandoli a loro volta come simboli soggetti a calcolo, si stabilisce un algoritmo, nel quale, con convenzioni che si presentano spontaneamente, vengono definiti la somma, il prodotto, e, sotto certe condizioni, anche il quoziente, e in generale il risultato di un'operazione razionale qualunque; salvo poi ad estendere anche ad altre operazioni algebriche, o analitiche trascendenti L'algebra che ne risulta è analoga a quella delle matrici, dei quaternioni, delle diadiche, delle sostituzioni lineari, e di altri simboli analoghi; cioè è un'algebra che differisce da quella ordinaria principalmente per la mancanza della proprietà commutativa della moltiplicazione.

Ne segue che, data un'equazione funzionale, in cui la funzione incognita $\varphi(x)$ si trovi assoggettata a operazioni come $\dot{F}$, ed eventualmente anche ad altre operazioni distributive (p. es. la derivazione), è permesso trattare i simboli di queste operazioni come se fossero moltiplicatori, ma moltiplicatori soggetti a un'algebra non commutativa. Per questa via è possibile eseguire alcune trasformazioni, riduzioni, e talora anche risoluzioni di equazioni; ma questi casi di risoluzione sono rari: in generale, l'algebra non commutativa offre difficoltà di ordine molto elevato, anche per la esecuzione dei passaggi più elementari.

Si possono però trovare singoli operatori che soddisfino alla proprietà $\dot{F}_1\dot{F}_2 = \dot{F}_2\dot{F}_1$. Operatori siffatti si chiamano *commutabili* ([3]). E allora vale un principio di calcolo funzionale: Se si parte da un qualunque insieme di operatori lineari fra loro commutabili, tutti quelli che da essi si deducono combinandoli con qualunque sèguito di operazioni analitiche (definite in base

([1]) Regione *finita* nel senso di *bornée*, che inoltre sia dotata di contorno convenientemente « regolare » quanto occorre per la validità dei calcoli e dei passaggi che verranno effettuati (p. es. sia un'area poligonale).

([2]) Cfr. p. es. Pincherle e Amaldi, *Le operazioni distributive*, Bologna, 1901.

([3]) Per es., un moltiplicatore numerico (cioè costante rispetto alla x) è commutabile con qualunque operatore lineare.

alle regole generali di cui sopra, ed effettuate un numero finito o infinito di volte, purchè il risultato abbia un senso) sono operatori lineari commutabili fra loro e coi proposti; e per tutto questo insieme di operatori vale un'algebra analoga (non del tutto identica) a quella ordinaria. Gli sforzi dei cultori di calcolo funzionale operativo si dirigono di frequente a ricavare tali algebre, e servirsene per trovare regole di soluzione dei problemi.

4. — Ciò premesso, scriviamo la condizione affinchè due operatori $\dot{F}_1$, $\dot{F}_2$, del tipo $\dot{F}$ siano commutabili fra loro. Il prodotto $\dot{F}_1 \dot{F}_2$ si intende definito mediante la formola

$$\dot{F}_1 \dot{F}_2 \varphi(x) = \dot{F}_1(\dot{F}_2 \varphi(x)) \tag{3}$$

ovvero

$$\dot{F}_1 \dot{F}_2 \varphi(x) = \dot{F}_1 \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x, y) \varphi(y)\, dy =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi . F_1(x, \xi) \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(\xi, y) \varphi(y)\, dy ,$$

e siccome per le ipotesi fatte si suppongono verificate le condizioni per la integrabilità sotto il segno integrale, si può anche scrivere

$$\dot{F}_1 \dot{F}_2 \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy . \varphi(y) \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x, \xi) F_2(\xi, y)\, d\xi , \tag{4}$$

cioè $\dot{F}_1 \dot{F}_2$ è ancora un operatore del tipo $\dot{F}$, la cui funzione coefficiente, che indicheremo con $F_1 F_2(x, y)$, è data da

$$F_1 F_2(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x, \xi) F_2(\xi, y)\, d\xi . \tag{5}$$

Per conseguenza, si ha $\dot{F}_1 \dot{F}_2 = \dot{F}_2 \dot{F}_1$ allorquando le due funzioni $F_1F_2(x, y)$ e $F_2 F_1(x, y)$ risultino identiche. La condizione richiesta è dunque

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F_1(x, \xi) F_2(\xi, y)\, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} F_2(x, \xi) F_1(\xi, y)\, d\xi . \tag{B}$$

Si riconosce qui, di poco generalizzata, la definizione di permutabilità del Volterra. Mantenendone la nomenclatura in questo caso più esteso, diremo che le $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ le quali soddisfano alla (B) sono *permutabili*.

Nel caso in cui le funzioni coefficienti si annullino per $y > x$, cioè nel caso in cui le operazioni integrali $\dot{F}$ si riducano alla forma

$$\psi(x) = \dot{F} \varphi(x) = \int_{-\infty}^{x} F(x, y) \varphi(y)\, dy , \tag{6}$$

la equazione (B) si semplifica in

$$\int_y^x F_1(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi = \int_y^x F_2(x, \xi)\, F_1(\xi, y)\, d\xi,$$

cioè coincide con la (A) del Volterra (permutabilità *di prima specie*).

Se invece le F si annullano per $y < 0$ e per $y > 1$, le operazioni integrali hanno la forma

$$(7) \qquad \psi(x) = \dot{F}\,\varphi(x) = \int_0^1 F(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

cioè sono operazioni « tipo Fredholm », e la permutabilità è data da

$$\int_0^1 F_1(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi = \int_0^1 F_2(x, \xi)\, F_2(\xi, y)\, d\xi$$

(permutabilità *di seconda specie* del Volterra, Nota VII citata, § 8).

Ma basterà in generale fissare l'attenzione sulla (B), nella quale entrambi questi casi, ed altri meno semplici che sarebbe facile immaginare, si trovano tutti racchiusi. In esse formole veramente, del pari che nella (1) e successive, i limiti di integrazione sono infiniti solo in apparenza, perchè le $F(x, y)$ sono state supposte nulle al difuori di una regione finita. Ma questa restrizione si può anche rimuovere, esigendo soltanto un particolare comportamento a distanza infinita. Così pure l'ipotesi della continuità si può sostiture con altre più generali. Su questi argomenti, mi riservo di ritornare in un'altra occasione.

5. — Dunque la permutabilità di due funzioni $F_1(x, y)$, $F_2(x, y)$ è la condizione che assicura la possibilità di assoggettare i corrispondenti operatori integrali $\dot{F}_1$, $\dot{F}_2$ a un algoritmo algebrico analogo a quello ordinario. L'algebra simbolica speciale delle funzioni permutabili si può mettere in corrispondenza biunivoca con quella degli operatori ad esse corrispondenti [1].

E potremo dire, cercando di dare una formulazione la più estesa possibile a un principio che corrisponde a una prima parte dei risultati del Volterra: *Allorchè in una equazione funzionale, la funzione incognita $\varphi(x)$ si trova assoggettata solo ad operazioni lineari le quali* (condizione

[1] Questo spiega gli interessanti risultati del prof. Evans, *Sopra l'algebra delle funzioni permutabili*. Memorie dei Lincei, ser. 5ª, vol. VIII, seduta del 5 marzo 1911 cioè l'algebra delle funzioni permutabili essere in corrispondenza di isomorfismo meriedrico con quella ordinaria (scalare). La differenza tra le due algebre sta specialmente nella diversa formulazione delle condizioni di annullamento di un prodotto (occorre un fattore degenere, non è necessario un fattore nullo) e nella limitazione del significato delle operazioni inverse. Queste differenze non complicano sensibilmente i calcoli, ma soltanto ne limitano la portata.

necessaria e sufficiente) *siano tutte commutabili a due a due* [ciò, che, per le operazioni integrali $\dot{\mathrm{F}}$ si riconosce dall'essere soddisfatta la formola (B)], *i simboli rappresentativi di queste operazioni si possono trattare come se fossero moltiplicatori soggetti all'algebra commutativa, e operando con questo algoritmo si può trasformare e semplificare l'equazione*, con la sola limitazione che gli operatori ottenuti per trasformazione abbiano un senso preciso secondo le note convenzioni elementari del calcolo operativo funzionale.

Per esempio l'equazione

$$\frac{1}{x}\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\varphi(x+1)+\int_0^x \mathrm{F}(x\,,y)\,\varphi(y)\,dy=\psi(x)$$

non soddisfa a tale condizione, perchè l'operazione di incremento finito che sta al secondo termine non è commutabile nè con $\frac{1}{x}\frac{d^2}{dx^2}$, nè in generale lo sarà quella integrale al terzo termine; quindi *a priori* essa non è riducibile, almeno nel senso con cui lo sono le altre equazioni composte con sole operazioni commutabili.

Invece l'equazione

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}-\int_{-\infty}^x f(x-\xi)\int_{-\infty}^{\xi} f(\xi-y)\,\varphi(y)\,dy=\psi'(x)+\int_{-\infty}^x f(x-y)\,\psi(y)\,dy$$

contiene solamente operazioni commutabili fra loro; e scrivendola (con notazioni il cui significato è palese):

$$\triangle^2\varphi(x)-\dot{\mathrm{F}}^2\varphi(x)=\psi(x)+\triangle\dot{\mathrm{F}}\,\psi(x),$$

si può trasformarla così

$$\varphi(x)=\frac{1}{\triangle^2-\dot{\mathrm{F}}^2}(\triangle+\dot{\mathrm{F}})\,\psi(x)=\frac{1}{\triangle-\dot{\mathrm{F}}}\,\psi(x),$$

e quindi una sua risolvente $\varphi(x)$ si trova applicando l'operazione inversa a $(\triangle-\dot{\mathrm{F}})$ alla funzione nota $\psi(x)$; salvo assicurarsi che questa operazione inversa abbia senso, e che il risultato $\varphi(x)$, sostituito nella equazione proposta, non renda divergenti gli integrali.

6. — Come mostra quest'ultimo esempio, il principio enunciato non conduce in generale, da solo, alla risoluzione effettiva; bensì solamente a dedurre formole contenenti simboli come $\frac{1}{a+\dot{\mathrm{F}}}$, ovvero $\frac{1}{\dot{\mathrm{F}}_1+\dot{\mathrm{F}}_2}$, e simili, di cui si conosce la definizione come operazioni inverse, ma che non si sanno tradurre in effettiva calcolazione. Vi è però una seconda parte della teoria del Volterra, che stabilisce la possibilità di calcolare tali operazioni inverse, in date condizioni ben precisate, mediante sviluppi in serie di potenze, o rapporti di serie di potenze, validi e convergenti, i cui termini sono di calcolazione riducibile a operazioni note. Nella prosecuzione della presente Nota mi occuperò della teoria che ha attinenza con questa seconda parte, sempre nei riguardi del significato operativo funzionale, e della eventuale possibile estensione dei risultati.

Meccanica. — *Sopra le vibrazioni normali di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota di E. Laura, presentata dal Socio C. Somigliana.

In una interessante Memoria, il sig. Love [1] osservò che, i metodi usati nella Teoria del Suono per la determinazione dello smorzamento delle vibrazioni di un corpo elastico immerso in un fluido, non tengono conto, nei riguardi del moto di questo, di una condizione dinamica, che lo stesso autore, in altro suo lavoro, dimostrò doversi verificare sul bordo dell'onda propagantesi nel fluido.

Agli stessi metodi si può muovere una obbiezione di altra natura: in essi è invero prefissato o il moto del fluido o quello del vibratore, benchè in seguito sia tenuto conto della resistenza esercitata dal fluido sopra la superficie del vibratore, o della diminuzione di energia subìta da esso per effetto delle onde propagantisi nel fluido che lo circonda [2] [3].

Il sig. Love nella suddetta Memoria, trattando il problema delle vibrazioni di una membrana elastica sferica vibrante radialmente in un fluido, effettivamente non prefissa nè il moto del fluido, nè quello del vibratore; egli non pone però il problema nella forma più generale come ho fatto io partendo, senza restrizione alcuna dalle equazioni di elasticità, in due casi semplici (lastra indefinita vibrante normalmente ai piani che la limitano, e sfera vibrante radialmente) nella presente Nota.

Il metodo seguìto consiste, da un lato, nel porre l'ipotesi della continuità delle tensioni e dello spostamento normale (o della velocità normale se il moto del fluido si determinerà a mezzo del potenziale di velocità) attraverso la superficie del vibratore; da un altro lato, nel considerare il

[1] A. E. H. Love, *Some Illustrations of Duay* ecc. Proc. Lond. Math. doc. (2), t. II, pag. 88.

[2] Un'esposizione sommaria di questi metodi è nella citata Memoria del Love. Cfr. pure Lord Rayleigh, *Theory of Souud,* § 302, Reaction of hir ecc., pp. 148-155.

[3] *Wave-motionswith Discontinuities at Wave-fronts.* Proc. Lond. Math. Soc. (2), t. I, pag. 37.