ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

del Volterra, che stabilisce la possibilità di calcolare tali operazioni inverse, in date condizioni ben precisate, mediante sviluppi in serie di potenze, o rapporti di serie di potenze, validi e convergenti, i cui termini sono di calcolazione riducibile a operazioni note. Nella prosecuzione della presente Nota mi occuperò della teoria che ha attinenza con questa seconda parte, sempre nei riguardi del significato operativo funzionale, e della eventuale possibile estensione dei risultati.

Meccanica. — *Sopra le vibrazioni normali di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota di E. Laura, presentata dal Socio C. Somigliana.

In una interessante Memoria, il sig. Love [1] osservò che, i metodi usati nella Teoria del Suono per la determinazione dello smorzamento delle vibrazioni di un corpo elastico immerso in un fluido, non tengono conto, nei riguardi del moto di questo, di una condizione dinamica, che lo stesso autore, in altro suo lavoro, dimostrò doversi verificare sul bordo dell'onda propagantesi nel fluido.

Agli stessi metodi si può muovere una obbiezione di altra natura: in essi è invero prefissato o il moto del fluido o quello del vibratore, benchè in seguito sia tenuto conto della resistenza esercitata dal fluido sopra la superficie del vibratore, o della diminuzione di energia subìta da esso per effetto delle onde propagantisi nel fluido che lo circonda [2] [3].

Il sig. Love nella suddetta Memoria, trattando il problema delle vibrazioni di una membrana elastica sferica vibrante radialmente in un fluido, effettivamente non prefissa nè il moto del fluido, nè quello del vibratore; egli non pone però il problema nella forma più generale come ho fatto io partendo, senza restrizione alcuna dalle equazioni di elasticità, in due casi semplici (lastra indefinita vibrante normalmente ai piani che la limitano, e sfera vibrante radialmente) nella presente Nota.

Il metodo seguìto consiste, da un lato, nel porre l'ipotesi della continuità delle tensioni e dello spostamento normale (o della velocità normale se il moto del fluido si determinerà a mezzo del potenziale di velocità) attraverso la superficie del vibratore; da un altro lato, nel considerare il

(1) A. E. H. Love, *Some Illustrations of Duay* ecc. Proc. Lond. Math. doc. (2), t. II, pag. 88.

(2) Un'esposizione sommaria di questi metodi è nella citata Memoria del Love. Cfr. pure Lord Rayleigh, *Theory of Souud*, § 302, Reaction of hir ecc., pp. 148-155.

(3) *Wave-motionswith Discontinuities at Wave-fronts*. Proc. Lond. Math. Soc. (2), t. I, pag. 37.

moto richiesto come composto di infiniti moti semplici dipendenti dal tempo a mezzo di esponenziali.

Dimostro, nei due casi trattati, che questi moti semplici appartengono a quella classe di vibrazioni, che ho detto smorzate, possibili in un corpo elastico isotropo e delle quali ho trattato sistematicamente in una mia precedente Memoria [1].

Nella presente Nota mi limito a dimostrare l'unicità della soluzione dei problemi proposti e a definire le rispettive vibrazioni normali riservandomi di dare, in un prossimo lavoro, maggiore svolgimento all'argomento.

Lastra vibrante normalmente alla sua superficie immersa in un fluido [2].

1. Così la lastra come il fluido non sono sollecitati da forze di massa. L'asse r sia normale alle facce terminali della lastra, le condizioni iniziali in essa sieno simmetriche al piano meridiano $z=0$, identiche in ogni piano $z=\text{cost}$ e le velocità iniziali parallele a z. Il moto che si genererà nella lastra è tale che lo spostamento e la velocità sono funzioni di z e t. Lo spostamento è inoltre sempre nullo per $z=0$. Nel fluido, supposto inizialmente in quiete, si ha la propagazione di un sèguito di onde piane normali a z.

Faccio le posizioni:

$2\alpha =$ spessore della lastra;

$a\,,\,c =$ velocità rispettive di propagazione delle onde longitudinali nella lastra e nel fluido;

$\varrho\,,\,\varrho_1 =$ densità rispettive della lastra e del fluido;

$w\,,\,\mathrm{W} =$ spostamenti rispettivi nella lastra e nel fluido.

Le equazioni indefinite del moto sono allora:

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} & a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} && 0<z<\alpha \\ & c^2\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 \mathrm{W}}{\partial t^2} && z>\alpha \end{aligned}\right. \qquad t\geq 0\,.$$

Poichè il moto è simmetrico rispetto al piano $z=0$ considero solo le condizioni in superficie relative alla faccia $z=\alpha$. L'ipotesi della continuità

[1] *Sopra i moti vibratorii armonici semplici e smorzati di un mezzo omogeneo, elastico ed isotropo*. R. Acc. di Scienze di Torino, serie II, t. LX, 1910.

[2] Questo problema è trattato pure in Poincaré, *Leçons sur la théorie de l'Élasticité*, pag. 160 e seguenti. Il metodo qui seguito e il modo di porre il problema sono però affatto diversi.

delle tensioni e dello spostamento normale attraverso a questo piano dà le equazioni in superficie:

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \varrho a^2 \frac{\partial w}{\partial z} &= \varrho_1 c^2 \frac{\partial W}{\partial z} \\ w &= W \end{aligned} \right\} \quad z = \alpha \quad t \geq 0 .$$

Nel fluido (porzione $z > 0$) si ha la propagazione di un'onda piana nel verso delle z crescenti, quindi si avrà:

$$(3) \qquad W = f\left(t - \frac{z - \alpha}{c}\right).$$

Al tempo t il suo bordo è il piano:

$$z = \alpha + ct .$$

Consideriamo un elemento di fluido di forma cilindrica di base $d\sigma$ adagiata sul piano ora detto e di altezza cdt presa nel verso delle z crescenti. Nell'intervallo di tempo $t^{-}t + dt$ esso passa dalla quiete ad uno stato di moto. La relazione meccanica:

aumento quantità di moto = impulso della forza

dà subito l'equazione:

$$\varrho_1 d\sigma . cdt \frac{\partial W}{\partial t} = - \varrho_1 . c^2 \frac{\partial W}{\partial z} d\sigma\, dt .$$

Dalla quale:

$$(4) \qquad \frac{\partial W}{\partial t} + c \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \qquad \text{per} \quad z = \alpha + ct .$$

Con la posizione (3) la (4) è sempre soddisfatta. La condizione al bordo dell'onda (che diremo di Love) qui si verifica dunque automaticamente.

Tenendo conto di (3), si vede che il nostro problema è ridotto: *alla ricerca di una funzione $w(z, t)$, regolare nell'intervallo*

$$0 < z < \alpha \quad t \geq 0$$

e annullantesi per $z = 0$, e di una funzione $f(\zeta)$ soddisfacenti alle equazioni:

$$\text{I)} \qquad a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad 0 \leq z \leq \alpha \qquad t \geq 0$$

$$\text{II)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \varrho a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= - \varrho_1 c f'(t) \\ w &= \qquad f(t) \end{aligned} \right\} \quad z = \alpha \qquad t \geq 0 .$$

Dobbiamo inoltre dare i valori iniziali ($t = 0$) di w e di $\dfrac{\partial w}{\partial t}$.

L'unicità della soluzione si dimostra facilmente. Dalla I) con una integrazione per parti si ricava l'equazione (¹):

$$(5) \qquad \varrho \int_0^\alpha \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + a^2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right]_0^t dz + \varrho_1 e \int_0^t f'(t)^2 \, dt = 0$$

la quale è l'equazione delle forze vive per il problema che stiamo trattando. Sieno $w_1(z, t)$, $f_1(t)$; $w_2(z, t)$, $f_2(t)$ una coppia di soluzioni delle I) e II) coesistenti con identiche condizioni iniziali di spostamento e velocità. Per la linearità di queste equazioni consegue che:

$$w_1(z, t) - w^2(z, t) \,, \quad f_1(t) - f_2(t)$$

è ancora soluzione. Inoltre si ha:

$$(6) \qquad \begin{cases} w_1(z, 0) - w_2(z, 0) = 0 \\ \left(\dfrac{\partial w_1}{\partial t} - \dfrac{\partial w_2}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \,. \end{cases}$$

Applicando la (5) a questa soluzione e tenendo conto delle (6) consegue:

$$\varrho \int_0^\alpha \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial t} \right]^2 + a^2 \left[\frac{\partial (w_1 - w_2)}{\partial z} \right]^2 \right\} dz + \\ + \varrho_1 e \int_0^t [f_1'(t) - f_2'(t)]^2 \, dt = 0 \,.$$

E poichè gli elementi di questi integrali sono positivi, si ha pure:

$$\begin{aligned} w_1(z, t) - w_2(z, t) &= \text{cost} \\ f_1(t) - f_2(t) \quad &= \text{cost} \,. \end{aligned}$$

La costante della 1ª equazione è nulla, perchè tale è il suo valore per $t = 0$. Supposta la continuità dello spostamento anche per $t = 0$, si deduce che è nulla pure la costante del 2° membro, e quindi l'identità delle due soluzioni dette.

2. Passiamo alla ricerca delle vibrazioni normali. Pongo

$$\begin{aligned} w(z, t) &= e^{\lambda t} \, w(z) \\ f(t) &= \mu \, e^{\mu t} \end{aligned}$$

con λ e μ costanti da determinarsi.

(¹) Il simbolo

$$[\quad]_0^t$$

indica l'accrescimento della funzione in parentesi per i valori del tempo 0 e t.

Indicando con Sen Cos Tang le ordinarie funzioni iperboliche vedesi che per soddisfare a I) con la condizione che si annulli lo spostamento per $z=0$ devesi porre:

$$w(z) = \mathrm{Sen}\,\frac{\lambda}{a}\,z\,.$$

Quindi le II) (condizioni in superficie) divengono:

$$\mu a\lambda\,\mathrm{Cos}\,\frac{\lambda\alpha}{a} = -\,\varrho_1 c\lambda\mu$$

$$\mathrm{Sen}\,\frac{\lambda a}{a} = \qquad \mu\,.$$

Da cui eliminando μ l'equazione trascendente in λ, si ha:

$$\text{(A)} \qquad \mathrm{Tang}\,\frac{\lambda\alpha}{a} = -\,\frac{\varrho a}{\varrho_1 c}$$

che tiene luogo dell'equazione di frequenza nel caso delle vibrazioni libere. Si ponga:

$$\frac{\lambda\alpha}{a} = u + iv$$

$$\frac{\varrho a}{\varrho_1 c} = m\,.$$

Si dimostra allora facilmente che, se $m > 1$, si ha:

$$u = \frac{1}{2}\log\frac{m-1}{m+1} < 0$$

$$v = \pm\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2} \quad (n \text{ intiero})\,.$$

Quindi

$$\lambda = \frac{a}{\alpha}(u+iv) = \frac{a}{2\alpha}\log\frac{m-1}{m+1} \pm i\,\frac{a}{\alpha}\,(2n+1)\,\frac{\pi}{2}$$

$$= -\,s \pm i\varrho_n\,.$$

La vibrazione nella lastra vale:

$$(a_m + ib_m)\,e^{-st}(\cos\varrho_m t \pm i\,\mathrm{sen}\,\varrho_m t)\,\mathrm{Sen}\,\frac{(-\,s \pm i\varrho_m)\,z}{a}\,.$$

Sicchè potremo prendere come vibrazione normale nella lastra:

$$(6) \quad w_n(z\,,t) = e^{-st}\left\{\left(a_n \operatorname{Cos}\frac{sz}{a}\operatorname{sen}\frac{\varrho_n z}{a} - b_n \operatorname{Sen}\frac{sz}{a}\cos\frac{\varrho_n z}{a}\right)\cos\varrho_n t - \left(a_n \operatorname{Sen}\frac{sz}{a}\cos\frac{\varrho_n z}{a} + b_n \operatorname{Cos}\frac{sz}{a}\operatorname{sen}\frac{\varrho_n z}{a}\right)\operatorname{sen}\varrho_n t\right\}$$

dipendente da due costanti arbitrarie a_n, b_n.

Le vibrazioni sono perciò smorzate, e il coefficiente di smorzamento è identico per tutte le vibrazioni.

I periodi

$$T_n = \frac{2\pi}{\varrho_n} = \frac{4\alpha}{(2n+1)\,a}$$

coincidono con quelli delle vibrazioni libere (tensioni nulle in superficie).

Il caso:

$$m < 1$$

dà invece, tenendo le stesse notazioni,

$$u = \frac{1}{2}\log\frac{1-m}{1+m} < 0$$

$$v = 0\ ,\ \pm\pi\ ,\ \pm 2\pi\ , \ldots$$

Le vibrazioni normali sono ancora smorzate, e comune è per esse il coefficiente di smorzamento.

I periodi, in questo caso, sono:

$$T_n = \frac{2\,\alpha}{n\,a}$$

e coincidono con quelli delle vibrazione libere. Il moto, in questo caso, può essere anche aperiodico.

Il problema non ha infine soluzioni per

$$m = 1\,,$$

come discende pure direttamente dalle equazioni I) e II).

Dei tre casi qui considerati, il primo è l'unico realizzabile se il fluido è gassoso. Per una lastra vibrante nel mercurio è ancora sempre verificato il 1° escluso che essa sia di piombo o di caucciù. In questi due casi si ha invero:

$$m = \frac{\varrho a}{\varrho_1 c} = \frac{11{,}37 \times 1320}{13{,}6 \times 1484}$$

$$m = \frac{0{,}92 \times 46}{13{,}6 \times 1484}$$