ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

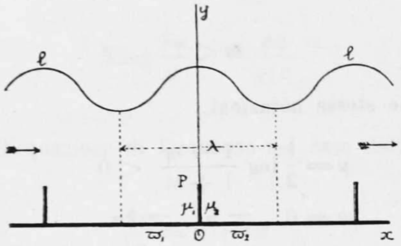
1912

Matematica. — *Sull'equazione integro-differenziale di tipo parabolico.* Nota di G. C. EVANS, presentata dal Socio V. VOLTERRA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Meccanica. — *Onde brevi causate da accidentalità periodiche del fondo.* Nota di U. CISOTTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una precedente Nota (¹) ho assegnato l'integrale generale del moto piano, irrotazionale, permanente di una corrente in un canale, sul cui fond sono periodicamente distribuite delle traverse verticali (vedi figura).



La forma del pelo libero, in relazione ai dati della questione (altezza delle traverse, intervallo fra traversa e traversa, e profondità media del canale) risulta allora caratterizzata mediante quadrature.

La valutazione di queste quadrature si presenta facile nel caso (che nella teoria dei moti ondosi fa riscontro alle cosiddette *onde brevi*) in cui l'intervallo λ fra traversa e traversa (lunghezza d'onda) non supera il doppio della profondità media H del canale.

Allora, com'è noto, della quantità

$$q = e^{-\frac{2\pi H}{\lambda}} \leq e^{-\pi} = 0.04 \ldots ,$$

sono a ritenersi trascurabili le potenze superiori alla prima.

Si trova che *il pelo libero è sinussoidale*, e che il suo massimo sopraelevamento dal livello medio H è

$$\varepsilon = \frac{2\lambda}{\pi} q \operatorname{tgh}^2 \frac{\pi h}{\lambda} ,$$

h designando l'altezza comune delle traverse.

(¹) *Sulle onde superficiali dovute a particolare conformazione del fondo.* Questi Rendiconti, seduta del 19 maggio 1912.

Poichè $\operatorname{tgh}^2 \frac{\pi h}{\lambda} \leq 1$, $q \leq \frac{4}{100}$ circa, e $\lambda \leq 2H$, così vediamo che è

$$\varepsilon \leq \frac{16}{100\,\pi} H = \frac{1}{20} H \text{ circa.}$$

Come ho già avuto occasione di rilevare ([1]), il campo della gravità non ha sensibile influenza sul fenomeno, se la velocità della corrente è abbastanza rilevante rispetto alla velocità di caduta libera di un grave (nel vuoto) da un'altezza pari ad ε, ossia nel problema attuale, da un'altezza eguale a $\frac{1}{20} H$.

È pure agevole la trattazione del problema con una ulteriore approssimazione, quando cioè si tiene conto anche dei termini in q^2, trascurando le potenze superiori. La tirannia dello spazio non mi consente di soffermarmi maggiormente. Mi limiterò semplicemente ad affermare che l'andamento del pelo libero rammenta, in tal caso, il profilo delle onde di seconda approssimazione di Stokes ([2]).

1. *Brevi richiami.* — Richiamo dalla Nota prima citata, notazioni e risultati.

Il sistema di riferimento essendo quello indicato in figura, designino: u e v le componenti della velocità; φ e ψ il potenziale e la funzione di corrente. Si ponga

$$x + iy = z \;,\; u - iv = w \;,\; \varphi + i\psi = f \;,\; w = e^{-i\omega}, \tag{1}$$

convenendo che, per $z = 0$ sia $\omega = \infty$.

f, w, ω, sono funzioni di $z = x + iy$, legate fra loro dalle relazioni

$$\frac{df}{dz} = w = e^{-i\omega}. \tag{2}$$

Posto, ancora

$$q = e^{-\frac{2\pi \bar{H}}{\nu}} \;,\; df = -\frac{\nu}{2\pi i}\frac{d\zeta}{\zeta}, \tag{3}$$

([1]) *Sull'intumescenza del pelo libero nei canali a fondo accidentato.* Questi Rendiconti, seduta del 5 maggio 1912. In sostanza si sfrutta il fatto che la gravità g interviene solo nella equazione $V^2 + 2gy =$ costante — V designa il valore assoluto della velocità — che dev'essere soddisfatta sul pelo libero l. Poichè sopra l è $y = H + y_1$; y_1 denotando lo scostamento (positivo o negativo) di un generico punto di l dal livello medio H, la precedente condizione può scriversi $V^2 \left\{ 1 + \frac{2gy_1}{V^2} \right\} =$ costante. Ma $|y_1| \leq \varepsilon$, e quindi $\frac{2g|y_1|}{V^2} \leq \frac{2g\varepsilon}{V^2}$; ora, per ipotesi, il secondo membro di questa ineguaglianza è trascurabile, lo è dunque anche il primo, e la condizione relativa al pelo libero diviene V = costante, cioè è indipendente da g, c. d. d.

([2]) Cfr. Math. and Physical Papers, Cambridge, University Press, 1880, vol. I, pag. 314 e seg.

ν essendo una costante positiva legata a λ dalla relazione [cfr. la formula (4) della Nota precedente]

$$\lambda = \frac{\nu}{2\pi i} \int_0^{2\pi} e^{i\omega} \frac{d\zeta}{\zeta} . \tag{4}$$

si ha da (2)

$$z - z_0 = \frac{\nu}{2\pi i} \int_{\zeta}^{\zeta_0} e^{i\omega} \frac{d\zeta}{\zeta} . \tag{5}$$

Questa formula stabilisce la corrispondenza fra i punti ζ della corona circolare $q \leq |\zeta| \leq 1$, e i punti z del piano del moto. Si intende che l' integrazione del secondo membro si intende fatta lungo un cammino che non esce dall'accennata corona circolare.

Rammentiamo che per $\omega(\zeta)$ si è trovato [formula (9''), Nota citata] il seguente sviluppo

$$\begin{aligned} \omega(\zeta) = i \log \frac{(1 - q\zeta)\left(1 - \dfrac{q^3}{\zeta}\right)(1 - q^5\zeta) \cdots}{\left(1 - \dfrac{q}{\zeta}\right)(1 - q^3\zeta)\left(1 - \dfrac{q^5}{\zeta}\right) \cdots} + \\ + \frac{i}{2} \log \frac{\left(1 - 2\dfrac{q}{\zeta} \cos\sigma_0 + \dfrac{q^2}{\zeta^2}\right)(1 - 2q^3\zeta \cos\sigma_0 + q^6\zeta^2) \cdots}{(1 - 2q\zeta \cos\sigma_0 + q^2\zeta^2)\left(1 - 2\dfrac{q^3}{\zeta} \cos\sigma_0 + \dfrac{q^6}{\zeta^2}\right) \cdots} , \end{aligned} \tag{6}$$

dove $0 \leq \sigma_0 \leq \pi$. Giova tenere presente che alla circonferenza $|\zeta| = 1$ considerata una sol volta nel verso $-1, i, 1, \ldots$ a partire dal punto -1, corrisponde la parte del pelo libero l compresa tra le verticali $x = -\frac{\lambda}{2}$, $x = +\frac{\lambda}{2}$, e che alla circonferenza $|\zeta| = q$ fa riscontro la corrispondente porzione di fondo.

2. *Soluzione approssimata.* — Trascurando nella (6) le potenze di q superiori alla prima, si ottiene

$$\omega(\zeta) = -2iq \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_0}{2} \cdot \zeta - i \log \frac{1 - \dfrac{q}{\zeta}}{\sqrt{1 - 2\dfrac{q}{\zeta} \cos\sigma_0 + \dfrac{q^2}{\zeta^2}}} . \tag{6'}$$

Questa espressione si mantiene regolare per $q < |\zeta| \leq 1$, finita sulla circonferenza $|\zeta| = q$ ad eccezione dei punti $\zeta = q$. $\zeta = qe^{i\sigma_0}$, $\zeta = qe^{-i\sigma_0}$ in cui diviene logaritmicamente infinita.

Equazione del pelo libero. — A punti del pelo libero corrispondono valori di ζ di modulo 1, posto perciò $\zeta = e^{i\sigma}$, dalla (6′) si ricava, con la cennata approssimazione:

$$(6'') \qquad e^{i\omega} = 1 + 4iq \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_0}{2} \operatorname{sen} \sigma .$$

Se si nota inoltre che $\frac{d\zeta}{\zeta} = i\, d\sigma$, la (4) dà

$$(4') \qquad \lambda = \nu ,$$

mentre la (5), dopo di avere separato la parte reale dalla immaginaria, ed eliminato fra le due relazioni risultanti il parametro σ, dà per equazione di l:

$$(7) \qquad y - y_0 = \frac{2\lambda}{\pi} q \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_0}{2} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} .$$

Come si vede trattasi di una sinussoide.

La costante y_0 rappresenta manifestamente la *profondità media* del canale, che nel caso attuale è H [1].

La massima sopraelevazione dal livello medio è $\frac{2\lambda}{\pi} q \operatorname{sen}^2 \frac{\sigma_0}{2}$ e corrisponde ai valori $x = k\lambda$ (k intero qualunque).

[1] Si osservi infatti che, la densità del liquido essendo 1, la portata H è definita da

$$\mathrm{H} = \int_0^y u\, dy ,$$

l'integrazione andando estesa, lungo una generica verticale, dal fondo fino alla linea libera. Moltiplichiamo ambo i membri per dx ed integriamo fra 0 e λ. Poichè H è costante, nel primo membro si ottiene $\lambda\mathrm{H}$, e nel secondo l'integrale J di $u\, dx\, dy$ esteso alla parte di striscia S compresa tra le verticali $x = 0$, $x = \lambda$. Ciò posto, prendiamo in esame il rettangolo R avente per base la base stessa di S, e per altezza il livello medio y_0, e notiamo: *a*) che le porzioni di S esterne ad R sono entrambi congruenti a metà della parte di R esterna ad S; *b*) che, come risulta da (6″), colla nostra approssimazione è $u = 1$ sopra l; *c*) che la funzione $u(x, y)$ può quindi essere prolungata anche nella parte di R esterna ad S facendole assumere quivi i valori che le spettano nei punti di S esterni ad R. Dopo ciò è manifesto che l'integrale J coincide coll'integrale di $u\, dx\, dy$ esteso al rettangolo R. Potremo dunque scrivere

$$\mathrm{H}\lambda = \int_0^{y_0} dy \int_0^\lambda u\, dx .$$

D'altra parte, avendo designato con ν la differenza costante $\varphi(x+\lambda, y) - \varphi(x, y)$, si ha

$$\nu = \int_0^\lambda u\, dx .$$

Ciò posto, per la precedente abbiamo $\mathrm{H}\lambda = \nu y_0$; ma $\lambda = \nu$, dunque $\mathrm{H} = y_0$; c. d. d.

Altezza delle traverse. — A punti del fondo del canale corrispondono valori di ζ di modulo q; posto perciò nella (6'), $\zeta = qe^{i\sigma}$, si ricava con la solita approssimazione

$$e^{i\omega} = i\sqrt{\frac{1-\cos\sigma}{\cos\sigma-\cos\sigma_0}}\,;$$

avremo dunque sul fondo

$$dz = -\frac{\lambda i}{2\pi}\sqrt{\frac{1-\cos\sigma}{\cos\sigma-\cos\sigma_0}}\,d\sigma \quad (-\pi\leq\sigma\leq\pi).$$

Da questa scende che per $\pi > |\sigma| > \sigma_0$ (parte orizzontale del fondo) è $dy = 0$, mentre per $|\sigma| < \sigma_0$ (punti della traversa) è $dx = 0$, come era da attendersi. Dopo ciò, l'altezza comune delle traverse è manifestamente definita dalla espressione

$$h = \frac{\lambda}{2\pi}\int_{\sigma_0}^{0}\sqrt{\frac{1-\cos\sigma_0}{\cos\sigma-\cos\sigma_0}}\,d\sigma = \frac{\lambda}{2\pi}\left|\log\frac{\sqrt{1+\cos\sigma}-\sqrt{\cos\sigma-\cos\sigma_0}}{\sqrt{1+\cos\sigma}+\sqrt{\cos\sigma-\cos\sigma_0}}\right|_{\sigma_0}^{0}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi}\log\frac{1-\operatorname{sen}\frac{\sigma_0}{2}}{1+\operatorname{sen}\frac{\sigma_0}{2}}\,.$$

Da questa si ricava

$$\operatorname{sen}\frac{\sigma_0}{2} = -\frac{e^{\frac{\pi h}{\lambda}}-e^{-\frac{\pi h}{\lambda}}}{e^{\frac{\pi h}{\lambda}}+e^{-\frac{\pi h}{\lambda}}} = -\operatorname{tgh}\frac{\pi h}{\lambda}\,.$$

Per questa, e perchè $y_0 = \mathrm{H}$, la equazione (7) del pelo libero assume la forma definitiva

$$(7')\qquad y = \mathrm{H} + \frac{2\lambda}{\pi}e^{-\frac{2\pi\mathrm{H}}{\lambda}}\operatorname{tgh}^2\frac{\pi h}{\lambda}\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\,.$$

Il pelo libero l è così caratterizzato in modo completo in funzione dei dati della questione H, λ, h.