ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Messa sotto questa forma la legge di Hauy, essa ha vigore per tutti i cristalli, siano solidi, fluenti o liquidi, poichè in tutti la forza di attrazione ha massimi e minimi, che sono situati in nodi a indici razionali e semplici. La differenza fra i cristalli a stato di aggregazione solido, o fluente, o liquido consiste in questo che fra cristalli solidi e fluenti la legge di Hany è evidente, e può perciò essere accertata con l'esperienza, facendo uso della legge sui numeri grandi; nei cristalli liquidi essa è mascherata dalla tensione superficiale e potrebbe essere resa evidente, sperimentando sulle forze di attrazione superficiale.

Un problema che si connette con questo riguarda le faccie vicinali nei cristalli, la differenza di plasticità nelle diverse direzioni come conseguenza della legge di Hauy nelle singole specie cristalline e i cristalli geminati. Una prossima Nota tratterà appunto di questo secondo problema.

Meccanica. — *Sulla legge elementare della gravitazione.* Nota di Max Abraham, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Nella Nota precedente ho proposto una teoria della gravitazione; secondo questa teoria il potenziale soddisfa all'equazione differenziale (1):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} = 4\pi\gamma\nu . \tag{1}$$

Deduciamo da essa la legge elementare per l'attrazione gravitazionale di due punti materiali in moto. Evidentemente questa legge sarà più semplice, di quella, che vale per due cariche elettriche [1], in quanto che non entra esplicitamente la velocità del punto attratto. Ci contentiamo di un'approssimazione, trascurando l'influenza — allora contemplata — esercitata dal potenziale gravitazionale sulla velocità c di propagazione della luce e della gravità; questa influenza è tanto minore, quanto lo sono le masse dei due punti.

L'integrazione della (1) si compie nel modo più spedito col metodo del Herglotz [2], interpretandola come equazione di Poisson per un potenziale quattrodimensionale. Siano $x\,y\,z\,u$ le coordinate del punto attraente P ed $x_0\,y_0\,z_0\,u_0$ le coordinate del punto attratto P_0, e sia

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + (u-u_0)^2} \tag{2}$$

[1] K. Schwarschild, Göttinger Nachrichten, 1903, pag. 132; M. Abraham, *Theorie der Elektrizität* II, sec. ed., pag. 97.

[2] G. Herglotz, Göttinger Nachrichten, 1904.

la loro distanza nello spazio quattrodimensionale. Allora dalla (1) si ottiene il potenziale:

$$\Phi = -\frac{\gamma}{\pi}\iiiint \frac{\nu\, dx\, dy\, dz\, du}{R^2}. \tag{3}$$

Passando al limite di una massa puntiforme m, porremo

$$\lim\left\{du\,.\iiint \nu\, dx\, dy\, dz\right\} = ic\, d\tau\,.\, m \qquad (\tau \text{ tempo proprio di P});$$

allora il potenziale diventa

$$\Phi = -\frac{icm\gamma}{\pi}\int \frac{d\tau}{R^2}. \tag{4}$$

Questo integrale si può calcolare [1] col metodo dei residui del Cauchy. Il residuo si riferisce a

$$R = 0\,, \quad \text{cioè} \quad u - u_0 = -ir \quad , \quad t_0 - t = \frac{r}{c}\,,$$

dove r è la distanza (tredimensionale) tra la posizione del punto potentenziante P nell'istante t e la posizione del punto potenziato P_0 nell'istante $t_0 = t + \frac{r}{c}$. Essendo, nella vicinanza di questo punto [1]

$$R^2 = 2\tau c\, S\,,$$

dove S è l'invariante

$$S = \frac{1}{c}\{(x - x_0)\dot{x} + (y - y_0)\dot{y} + (z - z_0)\dot{z} - ir\dot{u}\}\,, \tag{5}$$

si ottiene, come valore del *potenziale* ritardato [2]

$$\Phi = -\gamma\frac{m}{S}. \tag{6}$$

Naturalmente nella espressione (5) occorre porre per $x\, y\, z\ \dot{x}\, \dot{y}\, \dot{z}\, \dot{u}$ i valori relativi all'istante t dell'emissione, invece per $x_0\, y_0\, z_0$ le coordinate dal punto P_0 nell'istante $t_0 = t + \frac{r}{c}$, nel quale esso è incontrato dall'onda emessa nell'istante t dal punto potenziante P.

[1] Vedi A. Sommerfeld, Annalen der Physik, 33 (1910), pag. 665. Sitzungsberichte d. Bayerischen Akademie d. Wissensch. 1911, pag. 51.

[2] *Sui potenziali ritardati* vedi anche T. Levi-Civita. Nuovo Cimento VI, 1903.

Per calcolare il gradiente di Φ, giova derivare prima la (3) rispetto a x_0, y_0, z_0, u_0, e passare poi al caso limite della massa puntiforme.

Si ottiene così:

$$F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} = \frac{i c m \gamma}{\pi} \int \frac{2\, d\tau (x - x_0)}{R^4},$$

e come residuo dell'integrale, relativo a $R = 0$, il valore corrispondente di

$$\frac{1}{2}\left\{(x - x_0)\frac{(1 - T)}{c S^3} + \dot{x}\frac{1}{c^2 S^2}\right\}$$

dove T indica l'invariante

$$T = \frac{1}{c^2}\{(x - x_0)\ddot{x} + (y - y_0)\ddot{y} + (z - z_0)\ddot{z} - i r \ddot{u}\}. \tag{7}$$

Ne segue come prima componente della forza motrice agente su P_0

$$m_0 F = -m_0 \operatorname{grad} \Phi$$

il valore seguente:

$$\left\{\begin{aligned} & m_0 F_x = \gamma m m_0 \left\{(x - x_0)\frac{(1 - T)}{S^3} + \dot{x}\frac{1}{c S^2}\right\}, \\ & \text{ed analogamente per le altre componenti} \\ & m_0 F_y = \gamma m m_0 \left\{(y - y_0)\frac{(1 - T)}{S^3} + \dot{y}\frac{1}{c S^2}\right\}, \\ & m_0 F_z = \gamma m m_0 \left\{(z - z_0)\frac{(1 - T)}{S^3} + \dot{z}\frac{1}{c S^2}\right\}, \\ & m_0 F_u = \gamma m m_0 \left\{-i r \quad \frac{(1 - T)}{S^3} + \dot{u}\frac{1}{c S^2}\right\}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Queste formole mostrano, che la forza motrice elementare, esercitata da P su P_0, si compone da due vettori quattrodimensionali, dei quali il primo è spiccato dal punto attratto $P_0(x_0, y_0, z_0, u_0)$ al punto attraente $P(x y z, u_0 - i r)$, mentre che il secondo è parallelo alla velocità del punto attraente. Ciò corrisponde ai risultati del Poincaré [1] e del Minkowski [2].

[1] H. Poincaré, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 1906, I, pag. 174.

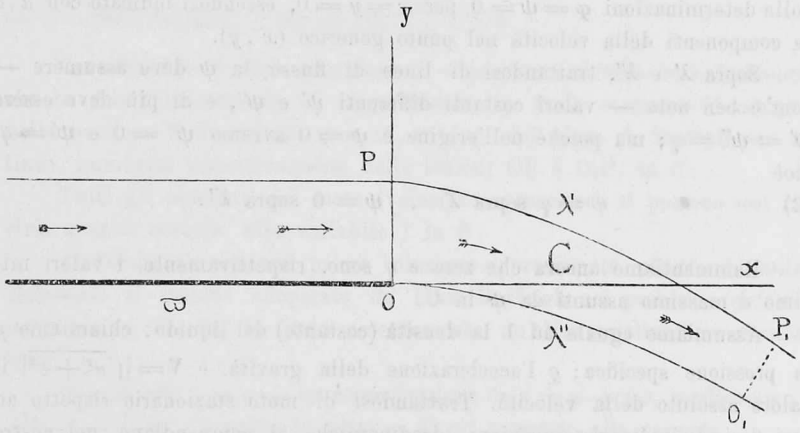
[2] H. Minkowski, loc. cit., Göttinger Nachrichten, 1908, pag. 57; vedi anche A. Sommerfeld, Annalen der Physik, 33 (1911), pag. 684.

Però la nostra legge elementare è più semplice, perchè non vi entra la velocità del punto attratto, e più generale, perchè tiene conto anche dell'accelerazione del punto attraente. Il suo confronto coll'osservazione astronomica potrebbe servire per provare la teoria proposta nella Nota precedente. (1).

Meccanica. — *Sopra l'efflusso a stramazzo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Si consideri un *efflusso a stramazzo*, in regime permanente.

L'andamento qualitativo del moto, in una generica sezione longitudinale (in piano verticale) sia quella che risulta schematicamente dalla figura. Si



supponga che, in ogni altra analoga sezione il moto del liquido abbia, sensibilmente, identico comportamento, corrispondendosi i punti di una stessa retta normale alle sezioni stesse. Si ha così il vantaggio di poter trattare la questione in due dimensioni.

Si prenda in esame, nel piano di una delle accennate sezioni longitudinali, la porzione di vena compresa tra la sezione OP che misura lo *spessore dello stramazzo*, ed una sezione trasversale O_1P_1 comunque prefissata, a valle; di modo che la regione C in cui si considera il moto, è in questo piano limitata: dalle accennate sezioni OP e O_1P_1, e dai due *peli*

(1) Nella Nota precedente $idl = icdt$ determina il differenziale du, di modo che dx, dy, dz, du sono le componenti di uno spostamento infinitesimo nello spazio a quattro dimensioni.