ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

1° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

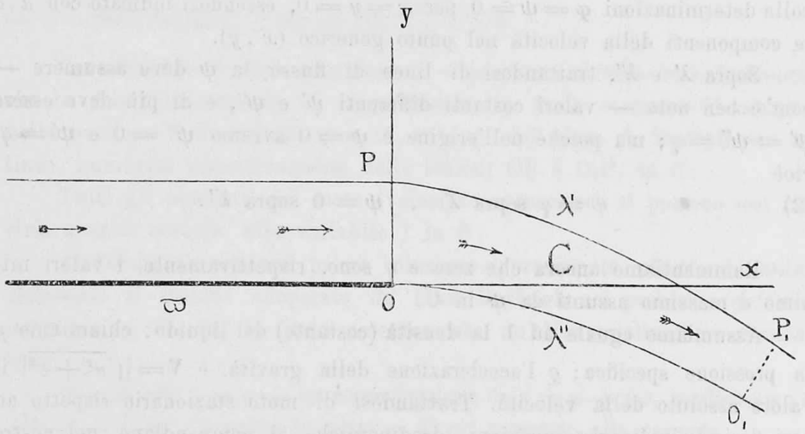
1912

Però la nostra legge elementare è più semplice, perchè non vi entra la velocità del punto attratto, e più generale, perchè tiene conto anche dell'accelerazione del punto attraente. Il suo confronto coll'osservazione astronomica potrebbe servire per provare la teoria proposta nella Nota precedente. [1].

Meccanica. — *Sopra l'efflusso a stramazzo.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

1. Si consideri un *efflusso a stramazzo*, in regime permanente.

L'andamento qualitativo del moto, in una generica sezione longitudinale (in piano verticale) sia quella che risulta schematicamente dalla figura. Si



supponga che, in ogni altra analoga sezione il moto del liquido abbia, sensibilmente, identico comportamento, corrispondendosi i punti di una stessa retta normale alle sezioni stesse. Si ha così il vantaggio di poter trattare la questione in due dimensioni.

Si prenda in esame, nel piano di una delle accennate sezioni longitudinali, la porzione di vena compresa tra la sezione OP che misura lo *spessore dello stramazzo*, ed una sezione trasversale O_1P_1 comunque prefissata, a valle; di modo che la regione C in cui si considera il moto, è in questo piano limitata: dalle accennate sezioni OP e O_1P_1, e dai due *peli*

[1] Nella Nota precedente $idl = icdt$ determina il differenziale du, di modo che dx, dy, dz, du sono le componenti di uno spostamento infinitesimo nello spazio a quattro dimensioni.

liberi (superiore e inferiore) λ' e λ'' [1]. Si assuma il piano stesso come piano $z = 0$ di un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, e si fissi su esso una coppia di assi (x, y) coll'origine sulla *soglia* O, l'asse y verticale e diretto verso l'alto, e l'asse x diretto nel senso della corrente.

Sieno: q la portata; $h = \overline{\mathrm{OP}}$ lo spessore dello stramazzo; c la velocità media in OP, così che, dato il regime permanente, si ha $q = ch$.

Introduciamo infine l'ipotesi che il moto abbia luogo *senza vortici*, e che *sia regolare e diversa da zero* la velocità in ogni punto di C.

2. Poichè il moto è irrotazionale, esistono notoriamente: un *potenziale di velocità* $\varphi(x, y)$ e una *funzione di corrente* $\psi(x, y)$, regolari in C e definite dalle equazioni

$$d\varphi = u\,dx + v\,dy \quad , \quad d\psi = -v\,dx + u\,dy, \tag{1}$$

colle determinazioni $\varphi = \psi = 0$ per $x = y = 0$, essendosi indicato con u, v le componenti della velocità nel punto generico (x, y).

Sopra λ' e λ'', trattandosi di linee di flusso, la ψ deve assumere — com'è ben noto — valori costanti differenti ψ' e ψ'', e di più deve essere $\psi' - \psi'' = q$; ma poichè nell'origine è $\psi = 0$ avremo $\psi'' = 0$ e $\psi' = q$, cioè

$$\psi = q \text{ sopra } \lambda' \quad , \quad \psi = 0 \text{ sopra } \lambda''. \tag{2}$$

Rammentiamo ancora che zero e q sono, rispettivamente, i valori minimo e massimo assunti da ψ in C.

Assumiamo eguale ad 1 la densità (costante) del liquido; chiamiamo p la pressione specifica; g l'accelerazione della gravità, e $\mathrm{V} = \left|\sqrt{u^2 + v^2}\right|$ il valore assoluto della velocità. Trattandosi di moto stazionario rispetto ad assi fissi, le ordinarie equazioni idrodinamiche si compendiano, nel nostro caso, nella relazione seguente:

$$\tfrac{1}{2}\,\mathrm{V}^2 + gy + p = \text{costante}. \tag{3}$$

Sopra i peli liberi λ' e λ'' la pressione deve essere costante, sarà perciò

$$\mathrm{V}^2 + 2gy = \text{costante, sopra } \lambda' \text{ e sopra } \lambda''. \tag{4}$$

[1] *Teoricamente* nulla impedirebbe di prefissare la sezione $\mathrm{O_1 P_1}$ ad una distanza comunque grande dalla soglia. Considerazioni pratiche però impongono che questa distanza non superi un certo limite. Basta pensare che in realtà, il moto della vena non segue indefinitamente le leggi della continuità: a partire da una certa sezione trasversale in poi le particelle cominciano a staccarsi dalla massa liquida, e dànno principio ad un complesso fenomeno discontinuo. Segue da ciò la convenienza di non seguire il moto oltre tale sezione.

3. Se si pone, al solito,

$$(5)\qquad \begin{cases} x + iy = z\,, \\ u - iv = w\,, \\ \varphi + i\psi = f\,, \end{cases}$$

w ed f risultano, per le (1), funzioni della variabile complessa $z = x + iy$, e le (1) stesse si compendiano nella relazione

$$(6)\qquad \frac{df}{dz} = w\,.$$

Variando z in C la w si mantiene regolare e tale che [n. 1] $|w| = \mathrm{V} > 0$. La f è pure regolare e, per la (6), $\left|\frac{df}{dz}\right| > 0$.

Considerando il piano complesso $f = \varphi + i\psi$, si vede immediatamente che la $f = f(z)$ consente di rappresentare in modo conforme il campo C nella porzione S di striscia $\psi = 0$, $\psi = q$, del piano f, limitata tra due linee, immagini rispettivamente delle sezioni OP e $\mathrm{O_1P_1}$ in C.

Tutti gli elementi del moto (velocità e pressione) si possono così riferire, quando occorra, alla variabile f in S.

4. Cerchiamo ora una prima soluzione approssimata, sfruttando sostanzialmente il metodo adoperato da Lord Rayleigh nel problema *dell'onda solitaria*, e di cui ho dato recentemente un'altra applicazione idrodinamica [1].

Considerata $z = x + iy$ come funzione di $f = \varphi + i\psi$, applichiamo ad essa lo sviluppo, secondo le potenze di ψ, arrestato alla seconda.

Posto

$$(7)\qquad \begin{cases} z(\varphi) = \mu(\varphi) + i\nu(\varphi)\,, \text{ con } \mu \text{ e } \nu \text{ reali,} \\ \mathrm{R}_1 = -\dfrac{\psi^2}{2h}\mu'' \quad , \quad \mathrm{R}_2 = -\dfrac{\psi^2}{2h}\nu''\,, \end{cases}$$

avremo

$$(8)\qquad x + iy = \mu + i\nu + i\psi(\mu' + i\nu') + h(\overline{\mathrm{R}}_1 + i\,\overline{\mathrm{R}}_2)\,,$$

essendosi indicato con apici le derivazioni rispetto a φ, e essendo

$$\overline{\mathrm{R}}_1 = -\frac{\psi^2}{2h}\,\overline{\mu''} \quad , \quad \overline{\mathrm{R}}_2 = -\frac{\psi^2}{2h}\,\overline{\nu''}\,,$$

[1] *Sopra il regime permanente nei canali a rapido corso* [Questi Rendiconti, vol. XX (1911), pp. 633-637].

dove $\overline{\mu''}$ e $\overline{\nu''}$ designano i valori assunti da μ'' e ν'' per convenienti valori di φ in C.

Da (8), separando la parte reale dalla immaginaria, e ritenendo trascurabili R_1 ed R_2 (salvo giustificare in seguito i limiti entro cui ciò è perfettamente legittimo), si ricava

$$x = \mu - \psi\nu' \quad , \quad y = \nu + \psi\mu' . \tag{9}$$

La (6), per le precedenti, porge

$$\frac{dx}{d\varphi} + i\frac{dy}{d\varphi} = \frac{u + iv}{V^2} = \mu' - \psi\nu'' + i(\nu' + \psi\mu'') .$$

Da queste — colla accennata approssimazione — si ricava

$$V^2 = \frac{1}{\mu'^2 + \nu'^2}\left\{1 + 2\psi\frac{\mu'\nu'' - \mu''\nu'}{\mu'^2 + \nu'^2}\right\} . \tag{10}$$

Per questa e per la seconda delle (9), la condizione (4) dà luogo alle seguenti equazioni

$$\frac{1}{\mu'^2 + \nu'^2} + 2g\nu = \text{costante} \quad , \quad \frac{\mu'\nu'' - \mu''\nu'}{\mu'^2 + \nu'^2} + g\mu' = 0 . \tag{11}$$

Queste equazioni, che determinano le due funzioni incognite $\mu(\varphi)$ e $\nu(\varphi)$, stanno ad esprimere che $V^2 + 2gy$ è costante, non solo sopra i peli liberi $\psi = 0$, $\psi = q$ (com'era prescritto) ma pur anco sopra ogni altra linea di flusso $\psi =$ costante.

Per integrare il precedente sistema giova introdurre due nuove funzioni ϱ e ϑ, legate a μ e ν dalle relazioni

$$\mu' = \varrho\cos\vartheta \quad , \quad \nu' = \varrho \operatorname{sen}\vartheta . \tag{12}$$

Il sistema (11) si trasforma così (dopo di avere derivato ambo i membri della prima rispetto a φ) nel seguente

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = g\varrho^4 \operatorname{sen}\vartheta \quad , \quad \frac{d\vartheta}{d\varphi} = - g\varrho^3\cos\vartheta . \tag{13}$$

La integrazione di questo sistema è immediata. Per divisione si ricava $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = - \varrho \operatorname{tg}\vartheta$, che integrata porge

$$\varrho = \varrho_0\cos\vartheta , \tag{14}$$

essendo ϱ_0 la costante di integrazione. Se si porta questa espressione di ϱ nella seconda delle (13) si può facilmente ricavare la $\vartheta(\varphi)$ e quindi, per la (14) stessa, la $\varrho(\varphi)$. Per dedurre le equazioni parametriche delle linee di flusso non abbiamo bisogno — come ora vedremo — di conoscere queste espressioni; notiamo soltanto che la $\vartheta(\varphi)$ risultando determinata a meno di una costante arbitraria, potremo disporre di essa in modo che nel punto O sia $\vartheta = \vartheta_0$, dove ϑ_0 è arbitrario.

Per ottenere μ e ν in funzione di ϑ, basta ricorrere alla (12), notare che $\mu' = \frac{d\mu}{d\vartheta}\vartheta'$ e $\nu' = \frac{d\nu}{d\vartheta}\cdot\vartheta'$, e tenere presenti la seconda delle (13) e la (14). Si ottengono allora due equazioni di primo ordine nelle funzioni μ e ν della variabile ϑ, che integrate porgono

$$(15) \qquad \mu - \mu_0 = -\frac{\operatorname{tg}\vartheta}{g\varrho_0^2} \quad , \quad \nu - \nu_0 = -\frac{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta}{2g\varrho_0^2} \, ,$$

μ_0 e ν_0 essendo le costanti di integrazione.

Portando nelle (9): le espressioni di μ e ν definite dalle precedenti, e quelle di μ' e ν' ricavate dalle (12) quando in esse si sostituisce a ϱ il suo valore (14), si ottengono le equazioni parametriche delle linee di flusso.

Per $\psi = 0$ e per $\psi = q$ si ottengono rispettivamente le equazioni dei peli liberi λ'' e λ'. Se si tiene presente che: *a*) il pelo libero $\lambda''(\psi = 0)$ deve partire orizzontalmente dal punto $x = y = 0$; *b*) il pelo libero $\lambda'(\psi = q = ch)$ deve partire orizzontalmente dal punto $x_0 = 0$, $y = h$; e si pone, per semplicità $\operatorname{tg}\vartheta = -\sigma$; le quattro costanti arbitrarie μ_0, ν_0, $\operatorname{tg}\vartheta_0 = -\sigma_0$ assumono i valori seguenti

$$(16) \qquad \mu_0 = 0 \quad , \quad \sigma_0 = 0 \quad , \quad \nu_0 = \frac{c^2}{2g\varrho_0^2} \quad , \quad \varrho_0 = \frac{1}{c} \, ,$$

e le equazioni delle linee di flusso, che in tal guisa sono completamente definite, assumono l'aspetto definitivo seguente

$$(17) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{c^2}{g}\sigma + \dfrac{\psi}{c}\dfrac{\sigma}{1+\sigma^2} \, , \\[2ex] y = -\dfrac{c^2}{2g}\sigma^2 + \dfrac{\psi}{c}\dfrac{1}{1+\sigma^2} \, , \end{cases} \qquad (\text{per } \sigma \geq 0) \, .$$

Come si vede *il pelo libero inferiore $\lambda''(\psi = 0)$ è una parabola avente per asse il semiasse negativo delle y; tutte le altre linee di flusso — tra cui, in particolare, il pelo libero superiore $\lambda'(\psi = ch)$ — sono quintiche razionali.*

5. Precisiamo ora le condizioni per le quali si può ritenere $R_1 = R_2 = 0$ [cfr. n. 4]. Poichè dalle (12), derivando e tenendo conto della seconda delle (13) e dell'ultima delle (16), si ricava

$$\mu'' = \frac{g}{c^4}\operatorname{sen} 2\vartheta \cos^4\vartheta \quad , \quad \nu'' = -\frac{g}{c^4}\cos 2\vartheta \cos^4\vartheta \, ,$$

si deduce che tanto $|\mu''|$ quanto $|\nu''|$ non superano mai $\frac{g}{c^4}$.

Di qua, se si tiene presente che il massimo valore di ψ è ch [cfr. n. 2], scendono le

$$\left|\frac{\psi^2}{h}\mu''\right| \leq \frac{gh}{c^2} < \left(\frac{\sqrt{2gh}}{c}\right)^2 \quad \text{e} \quad \left|\frac{\psi^2}{h}\nu''\right| < \left(\frac{\sqrt{2gh}}{c}\right)^2,$$

e quindi, per le (7), tanto $|R_1|$ quanto $|R_2|$ sono minori del quadrato del rapporto $\dfrac{\sqrt{2gh}}{c}$.

Possiamo concludere che i risultati dei numeri che precedono sono validi tutte le volte che, *la velocità media dello stramazzo alla soglia è abbastanza rilevante rispetto alla velocità di caduta libera* $(\sqrt{2gh})$ *di un grave da una altezza pari allo spessore dello stramazzo* (h), *da potersi trascurare le potenze eguali e superiori alla seconda, del rapporto* $\dfrac{\sqrt{2gh}}{c}$.

In complesso questa teoria di prima approssimazione rende conto in modo soddisfacente dell'andamento di lame stramazzanti, di piccolo spessore.

Matematica. — *Sul vantaggio che presenta un'estensione delle funzioni di Green.* Nota di A. M. MOLINARI, presentata dal Corrispondente A. DI LEGGE.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Fisica. — *Sul valore delle componenti la forza elettromotrice delle coppie voltaiche costanti.* Nota di G. GUGLIELMO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In una Nota antecedente (Rendiconti dell'Acc. dei Lincei, 2° semestre 1910) considerando l'irregolarità ed il disaccordo dei valori ottenuti da diversi fisici, con misure dirette, per la differenza di potenziale di contatto fra un metallo ed un elettrolito, ho esposto come cercassi di ricavarli termodinamicamente dal calore dovuto alla reazione chimica che si produce presso il metallo quando passa la corrente.

Chiamando $\pm$ C questo calore per un certo peso di metallo disciolto, o deposto, e la corrispondente quantità di elettricità che è passata dal metallo all'elettrolito o viceversa. $\pm c$ la corrispondente quantità di calore che si manifesta o è assorbita localmente, presso il metallo, V la differenza di potenziale cercata fra il metallo e l'elettrolito, T la temperatura assoluta,