ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

4) esaminiamo il comportamento delle soluzioni solide sature di acido borico con fase solida, sia a diverse temperature alla stessa pressione (l'atmosferica), sia facendole bollire a pressione ridotta, e determiniamo la quantità di acido borico che passa nell'acqua di condensazione;

5) troviamo che, facendo bollire soluzioni di borace sature con fase solida, nel vapore non passa acido borico.

Presto ritorneremo su questo argomento e su quello della volatilità dell'acido borico in vapori di solventi diversi dall'acqua.

Matematica. — *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle variazioni.* Nota III di Leonida Tonelli, presentata dal Socio S. Pincherle [1].

1. Nella Nota precedente [2] stabilimmo il seguente teorema: *Se al tendere della curva* C_1 *alla* C, *la lunghezza della prima tende a quella della seconda, è*

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F(x, y, x', y')\, ds = \int_C F(x, y, x', y')\, ds.$$

Tale proposizione non è che un caso particolare di quest'altra ben più generale. Indichiamo con $G(x, y, x', y')$ una funzione delle quattro variabili x, y, x', y', soggetta alle stesse condizioni della F (vedi Nota I, n. 2) e di più soddisfacente all'altra

$$G(x, y, x', y') = \frac{G_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{G_{x'y'}}{x'y'} = \frac{G_{y'y'}}{x'^2} > 0 \qquad (\text{oppure} < 0)$$

per tutti i punti (x, y) del solito campo A e per tutte le coppie di numeri x', y' non nulli insieme. Abbiamo allora il teorema

Se le curve C_1 *e* C *sono rettificabili* [3] *e la prima tende alla seconda in modo che sia*

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} G(x, y, x', y')\, ds = \int_C G(x . y, x', y')\, ds$$

è anche

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F(x, y, x', y')\, ds = \int_C F(x, y, x', y')\, ds.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 luglio 1912.

(2) *Sugli integrali curvilinei del Calcolo delle variazioni*, Nota II, questi Rendiconti, 5 maggio 1912.

(3) Intenderemo sempre si tratti di curve continue.

Se qui facciamo $G(x, y, x', y') = \sqrt{x'^2 + y'^2}$, otteniamo in particolare il teorema sopra ricordato.

La dimostrazione della nostra proposizione è quella stessa del caso particolare, salvo, naturalmente, i cambiamenti dovuti alle nuove condizioni. Si prenderà come funzione ausiliare la funzione $\overline{F}$ definita dall'uguaglianza

$$\overline{F}(x, y, x', y') = F(x, y, x', y') + m \,.\, G(x, y, x', y'),$$

dove m è un numero positivo tale che sia

$$F_1(x, y, x', y') + m \,.\, G_1(x, y, x', y') > 0$$

per tutti i punti $(x\,y)$ di A e per tutti quelli $(x'\,y')$ della circonferenza $x'^2 + y'^2 = 1$. Questo numero m certamente esiste, data l'ipotesi fatta sulla G e la continuità delle F_1 e G_1.

Per ripetere ora tal quale il ragionamento fatto al n. 2 della Nota II, è necessario applicare una proposizione che verrà da noi dimostrata in un lavoro di prossima pubblicazione (*Sul caso regolare nel Calcolo delle variazioni*). La proposizione è la seguente: *se la funzione* $F(x, y, x', y')$ *è tale che sia* $F_1 > 0$ *per ogni punto* (x, y) *di* A *ed ogni coppia di numeri* x', y' *non nulli insieme*, e C_1 e C *sono due curve (continue) rettificabili interne ad* A, *delle quali la prima tende alla seconda, è*

$$\int_C F(x, y, x', y')\, ds \leq \text{Min} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F(x, y, x', y')\, ds \text{ [1]}.$$

Applicando questa proposizione alla funzione $\overline{F}$, abbiamo

$$\int_C F\, ds + m \int_C G\, ds \leq \text{Min} \lim_{C_1 \equiv C} \left\{ \int_{C_1} F\, ds + m \int_{C_1} G\, ds \right\};$$

e per essere

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} G\, ds = \int_C G\, ds,$$

otteniamo

$$(1) \qquad \int_C F\, ds \leq \text{Min} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F\, ds.$$

Analogamente, se definiamo la funzione $\overline{\overline{F}}$ in modo che sia

$$\overline{\overline{F}}(x, y, x', y') = F(x, y, x', y') - M \,.\, G(x, y, x', y'),$$

dove M rende soddisfatta la disuguaglianza

$$F_1(x, y, x', y') - M\, G_1(x, y, x', y') < 0$$

[1] Questa proposizione fu da noi già dimostrata nella Memoria (T) n. 27, sotto le ipotesi $F > 0$, $F_1 > 0$.

per tutti i punti (x, y) di A e tutti quelli (x', y') di $x'^2 + y'^2 = 1$, otteniamo

$$\int_C F\,ds \geq \text{Mass} \lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F\,ds \text{ [1]}. \tag{2}$$

Le disuguaglianze (1) e (2) dimostrano il nostro teorema.

2. Dall'enunciato del n. precedente segue subito l'altro:

Se per tutti i punti (x, y) di A e per tutte le coppie di numeri x', y' non nulli insieme, sono soddisfatte le disuguaglianze

$$F_1 \neq 0 \quad , \quad G_1 \neq 0 ,$$

e la curva rettificabile C_1 tende all'altra, pure rettificabile, C, l'uguaglianza

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} G(x, y, x', y')\,ds = \int_C G(x, y, x', y')\,ds$$

è condizione necessaria e sufficiente affinchè sia

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F(x, y, x', y')\,ds = \int_C F(x, y, x', y')\,ds .$$

Si è già notato che la condizione è sufficiente. Per mostrare che è anche necessaria basta applicare il teorema del n. precedente scambiando fra loro le funzioni G e F.

3. In particolare si ha che

Se per i soliti valori di x, y, x', y', è sempre $F_1 \neq 0$, condizione necessaria e sufficiente affinchè, al tendere della curva C_1 alla C, si abbia

$$\lim_{C_1 \equiv C} \int_{C_1} F\,ds = \int_C F\,ds$$

è che la lunghezza della C_1 tenda a quella della C.

Questo risultato completa quello del numero due della Nota II. Se la F non soddisfa alla disuguaglianza $F_1 \neq 0$, la condizione precedente, pur restando sufficiente, non si mantiene necessaria, come si è già detto al n. 3 della Nota sopra citata.

4. Sempre alla stessa Nota facemmo un'applicazione del teorema di quel n. 2 al problema degli isoperimetri del tipo primitivo, nel quale cioè l'integrale che deve mantenere un valore fisso per tutte le curve della varietà considerata è quello che esprime la lunghezza di una curva. Il medesimo teorema è però utile anche nella risoluzione del più generale problema

[1] Questa disuguaglianza può ottenersi anche applicando la (1) alla funzione $-$ F.

degli isoperimetri: fra tutte le curve C_1 di un dato campo, per le quali si abbia costantemente

$$\int_C G(x, y, x', y')\, ds = l$$

(l numero fisso, indipendente dalle C), trovare quella che rende minimo (o massimo) l'integrale

$$\int_C F(x, y, x', y')\, ds \text{ [1]}.$$

Si determini, invero, il limite inferiore (o superiore) I dei valori che l'integrale della F assume per tutte le curve C considerate, e si scelga una successione C_n $(n = 1, 2, ...)$ di tali curve in modo che sia

$$\lim_{n=\infty} \int_{C_n} F\, ds = I.$$

Se allora è possibile estrarre dalle C_n $(n = 1, 2, ...)$ un'altra successione $C_{n'}$ $(n' = 1, 2, ...)$ avente una curva limite $\overline{C}$, in modo che sia

$$\lim_{n'=\infty} \text{lungh}\, C_{n'} = \text{lungh}\, \overline{C},$$

il teorema, di cui si è parlato, porta che siano verificate le uguaglianze

$$\int_{\overline{C}} G(x, y, x', y')\, ds = l$$

$$\int_{\overline{C}} F(x, y, x', y')\, ds = \lim_{n'=\infty} \int_{C_{n'}} F\, ds = I,$$

e stabilisce così l'esistenza del minimo (o massimo) domandato.

Talvolta, pur essendo possibile dimostrare l'esistenza di una successione $C_{n'}$ che tende ad una curva limite $\overline{C}$, può riuscire assai difficile provare l'uguaglianza

$$\lim_{n'=\infty} \text{lungh}\, C_{n'} = \text{lungh}\, \overline{C},$$

mentre può essere, per certe circostanze speciali, più facile la verifica dell'altra

$$\int_{\overline{C}} G(x, y, x', y')\, ds = l.$$

In questi casi, se è soddisfatta la disuguaglianza $G_1 \neq 0$, l'applicazione del

[1] Qui alle F e G non si impongono le condizioni $F_1 \neq 0$, $G_1 \neq 0$.

teorema dato al n. 1, porta che sia

$$\int_{\overline{C}} F\, ds = \lim_{n'=\infty} \int_{C_{n'}} F\, ds = I\,,$$

e si ha così ancora l'esistenza del minimo (o massimo).

5. Inutile dire che anche la proposizione data al n. 6 della Nota II può essere generalizzata analogamente a quanto si è fatto per quella del n. 2. Termineremo piuttosto generalizzando il lemma dimostrato al n. 5 della medesima Nota.

Vale il seguente criterio di convergenza uniforme:

Se la funzione a variazione limitata [1] $f_n(x)$ *converge, per* $n = \infty$, *in ogni punto dell'intervallo* (a, b) *in cui è data, verso una funzione continua* $f(x)$, *in modo che la sua variazione in tutto* (a, b) *tenda a quella, pure limitata, di* $f(x)$, *la convergenza della* $f_n(x)$ *è uniforme* [2].

Indichiamo con $V_n(x)$ la variazione della funzione $f(x)$ nell' intervallo (a, x); con $V(x)$ quella della $f(x)$. È per ipotesi,

$$\lim_{n=\infty} V_n(b) = V(b)\,,$$

ed essendo

$$\text{Min} \lim_{n=\infty} V_n(x) \geq V(x)$$

$$\text{Min} \lim_{n=\infty} \{ V_n(b) - V_n(x) \} \geq V(b) - V(x) \quad [3],$$

è anche

$$\lim_{n=\infty} V_n(x) = V(x)\,.$$

Le funzioni $V_n(x)$ sono tutte non decrescenti in (a, b) e convergono in ogni punto di quest' intervallo, per $n = \infty$ alla $V(x)$, fuzione continua perchè tale è la $f(x)$.

Il lemma ricordato del n. 5 della Nota II assicura allora che le $V_n(x)$ convergono in tutto (a, b) uniformemente verso la $V(x)$.

Per questa convergenza uniforme e per la continuità della $V(x)$ è possibile, preso un ε positivo arbitrario, determinare due numeri $\overline{n}$ e δ tali che, per ogni $n > \overline{n}$ ed ogni coppia x_1, x_2 soddisfacente alla disuguaglianza $|x_1 - x_2| < \delta$, sia sempre

$$|V_n(x_1) - V_n(x_2)| < \varepsilon \quad , \quad |V(x_1) - V(x_2)| < \varepsilon\,.$$

Ed osservando che l'oscillazione di una funzione in un determinato inter-

[1] Con *variazione* di una funzione intendiamo la *variazione totale di Jordan*.

[2] Si noti che alla funzione $f_n(x)$ non si impone la condizione della continuità.

[3] Ciò scende immediatamente da una proposizione dimostrata da H. Lebesgue nelle sue *Leçons sur l'intégration* ecc., pag. 51.

vallo è sempre minore od uguale alla variazione calcolata nello stesso intervallo, si ha anche, per tutti gli $n > \overline{n}$ e tutte le coppie x_1, x_2 dette,

$$(3) \qquad |f_n(x_1) - f_n(x_2)| < \varepsilon \quad , \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon .$$

Dopo ciò, si divida (a, b) in un numero r di parti tutte $< \delta$, e si determini un numero $\overline{\overline{n}}$ tale che per ogni $n > \overline{\overline{n}}$ sia

$$(4) \qquad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

in tutti gli $r + 1$ estremi di questa parte. Indicando con $\overline{x}$ un estremo di una parte qualunque e con x un punto arbitrario di tal parte, si deduce dalle (3) e (4), per ogni $n > \begin{cases} \overline{n} \\ \overline{\overline{n}} \end{cases}$

$$f_n(x) - f(x) = f_n(x) - f_n(\overline{x}) + f_n(\overline{x}) - f(\overline{x}) + f(\overline{x}) - f(x)$$
$$|f_n(x) - f(x)| < 3\varepsilon .$$

Ciò mostra la convergenza uniforme della $f_n(x)$.

Dalla proposizione ora dimostrata segue il corollario:

Se le funzioni $f_n(x)$ e $f(x)$ sono assolutamente continue e la prima converge in ogni punto di (a, b) verso la seconda in modo che sia

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b |f'_n(x)|\, dx = \int_a^b |f'(x)|\, dx ,$$

la convergenza della f_n è uniforme.

Ed anche: *Se la funzione $f_n(x)$ converge in ogni punto di (a, b) verso la funzione continua $f(x)$, ed il suo rapporto incrementale rimane sempre maggiore (o minore) di un numero finito fisso, indipendente da n, allora la convergenza è uniforme* [1].

Se le funzioni integrabili $\varphi_n(x)$ sono ugualmente limitate in un senso in tutto (a, b), ed è per ogni x di quest'intervallo

$$\lim_{n=\infty} \int_a^x \varphi_n(x)\, dx = \int_a^x \varphi(x)\, dx ,$$

dove $\varphi(x)$ è un'altra funzione integrabile, la convergenza di $\int_a^x \varphi_n(x)\, dx$ è uniforme.

[1] Per vedere ciò basta considerare le funzioni $f_n(x) - Ax$, $f(x) - Ax$. dove A è un numero di cui rimane sempre maggiore (o minore) il rapporto incrementale della f_n, qualunque sia n.