ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Espressione per trascendenti ellittiche della funzione che caratterizza i moti ondosi provocati da periodiche accidentalità del fondo* [Estratto da una lettera al prof. T. Levi-Civita]. Nota di H. VILLAT, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

. . . .

Vuol Ella permettermi di aggiungere un complemento all' interessante Nota del sig. Cisotti, *Sulle onde superficiali dovute a particolare conformazione del fondo*, testè apparsa nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei?

Con un procedimento ben noto, l'autore riconduce immediatamente la soluzione del problema alla ricerca di una funzione $\omega(\zeta)$ regolare nella corona circolare $q < |\zeta| < 1$, reale per $|\zeta| = 1$, e tale che la sua parte reale prende, per $\zeta = qe^{is}$, i valori seguenti:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\pi}{2} & \text{se} & 0 < s < s_0\,, \\[2ex] 0 & \text{se} & s_0 < s < 2\pi - s_0\,, \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2} & \text{se} & 2\pi - s_0 < s < 2\pi\,. \end{array}$$

Egli ottiene allora la funzione $\omega(\zeta)$ sotto la forma·

$$\omega(\zeta) = i \log \frac{(1-q\zeta)\left(1-\dfrac{q^3}{\zeta}\right)(1-q^5\zeta)\ldots}{\left(1-\dfrac{q}{\zeta}\right)(1-q^3\zeta)\left(1-\dfrac{q^5}{\zeta}\right)\ldots} +$$

$$+\frac{i}{2}\log\frac{\left(1-\dfrac{2q}{\zeta}\cos s_0+\dfrac{q^2}{\zeta^2}\right)(1-2q^3\zeta\cos s_0+q^6\zeta^2)\ldots}{(1-2q\zeta\cos s_0+q^2\zeta^2)\left(1-2\dfrac{q^3}{\zeta}\cos s_0+\dfrac{q^6}{\zeta^2}\right)\ldots}.$$

Questa funzione — ecco il risultato su cui vorrei richiamare la Sua attenzione — è suscettibile di una espressione assai semplice ed elegante per mezzo di certe funzioni ellittiche. Ciò è tanto più degno di nota, in quanto la formula testè scritta non lo fa certo presumere *a priori*. Io vi pervengo come applicazione quasi immediata di principî che indicai in una Nota re-

[1] Pervenuta all'Accademia il 2 luglio 1912.

cente (¹). Osservo all' uopo che, se la parte immaginaria di una funzione analitica è nulla sopra tutta la circonferenza $|\zeta| = 1$, sarà pur nulla, sulla stessa circonferenza, la derivata normale della parte reale. Si è così condotti al problema seguente:

« Trovare una funzione analitica di ζ, regolare nella corona, tale che la sua parte reale assume (nel modo più sopra precisato) i valori $0, \pm \frac{\pi}{2}$ sul contorno interno, mentre la derivata normale di tale parte reale si annulla su tutto il contorno esterno ».

Cambiamo ζ in $\frac{q}{\zeta}$ per riportarci alle notazioni della mia Nota: rimangono così invertiti i due contorni. Introduciamo le funzioni ellittiche di semiperiodi ω_1, ω_3 tali che

$$q = e^{-\frac{\pi\omega_3}{2i\omega_1}}.$$

Giovandomi della funzione, che ho indicato con $F(z)$ nella Nota suddetta, trovo la funzione cercata sotto la forma

$$\Omega(\zeta) = \frac{i}{2} \log \frac{\xi_{30}^2\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$

(la notazione ξ_{30} designa, ben s' intende, un quoziente di funzioni σ: $\xi_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma_\beta}$ $\xi_{\alpha 0} = \frac{\sigma_\alpha}{\sigma}$). Mi limiterò a mostrare brevemente che questa espressione risolve effettivamente la questione posta in principio.

Si verifica in modo ovvio che la parte reale $\Omega(\zeta)$ prende i valori voluti sulla circonferenza esterna della corona. Per provare che la funzione $\Omega(\zeta)$ è reale sulla circonferenza interna, basta far vedere che il modulo della quantità

$$\frac{\xi_{30}^2\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$

è eguale ad 1 per $\zeta = qe^{is}$ (s reale). Ciò si mette in evidenza come segue.

(¹) *Sur un problème mixte de la théorie des fonctions harmoniques dans une aire annulaire*, Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris, t. 153, pag. 518 (4 settembre 1911).

Se noi sostituiamo $\log q + is = -\frac{\pi\omega_3}{2i\omega_1} + is$ al posto di $\log\zeta$, la quantità in questione diviene

$$\frac{\xi_{30}^2\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_3}{2}\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{\omega_3}{2}\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{\omega_3}{2}\right)}$$

Il quadrato del relativo modulo si ottiene moltiplicando per la quantità coniugata. Si ha dunque per tale quadrato:

$$\mathrm{M} = \frac{\xi_{30}^2\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_3}{2}\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{\omega_3}{2}\right)\xi_{30}\left(\frac{\pi_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{\omega_3}{2}\right)} \times$$

$$\times \frac{\xi_{30}^2\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\omega_3}{2}\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\omega_3}{2}\right)}.$$

Ora si ha, qualunque sia α (cfr. per es. Tannery et Molk, *Fonctions elliptiques*, LX, 4),

$$\xi_{30}\left(\alpha + \frac{\omega_3}{2}\right) = \xi_{30}\left(\alpha - \frac{\omega_3}{2} + \omega_3\right) = -\sqrt{e_1 - e_3}\,\sqrt{e_2 - e_3}\,\xi_{03}\left(\alpha - \frac{\omega_3}{2}\right):$$

e per conseguenza

$$\xi_{30}\left(\alpha + \frac{\omega_3}{2}\right)\xi_{30}\left(\alpha - \frac{\omega_3}{2}\right) = -\sqrt{e_1 - e_3}\,\sqrt{e_2 - e_3}\,.$$

Applicando questa formula tre volte, dopo avervi fatto successivamente $\alpha = \frac{\omega_1}{\pi}s$, $\alpha = \frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)$, $\alpha = \frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)$, si trova subito

$$\mathrm{M} = 1\,.$$

La funzione $\Omega(\zeta)$ risponde dunque alle condizioni volute. È chiaro d'altra parte che essa si comporta regolarmente entro la corona.

Torniamo ormai alle notazioni del Cisotti, riponendo in $\Omega(\zeta)\,\frac{q}{\zeta}$ in luogo di ζ, e di conseguenza $-\frac{\pi\omega_3}{2i\omega_1} - \log\zeta$ in luogo di $\log\zeta$.

Si arriva alla combinazione che la funzione $\omega(\zeta)$ di cui si vale questo autore può mettersi sotto la forma

$$\omega(\zeta) = \frac{i}{2}\log\frac{\xi_{30}^2\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega_3}{2}\right)}{\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta + \frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\omega_3}{2}\right)\xi_{30}\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\zeta - \frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\omega_3}{2}\right)}.$$

. . . .