ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sopra un'equazione integro-differenziale del tipo parabolico.* Nota I del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrispondente G. LAURICELLA.

1. L'equazione che ci proponiamo di studiare in questa Nota è la seguente:

$$u(x,t)+\int_0^1 \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t} \mathrm{H}(\xi,x)\,d\xi = g(x,t)\,. \tag{1}$$

Essa si presenta — come mostreremo in Note successive — nell'integrazione delle equazioni differenziali del tipo parabolico; in particolare delle equazioni e dei sistemi di equazioni differenziali, a cui soddisfano le componenti della velocità di un fluido viscoso che si muove di moto lento.

Supponiamo che $\mathrm{H}(\xi,x)$ sia una funzione reale e simmetrica delle due variabili reali ξ, x, tale che l'integrale, in senso di Lebesgue,

$$\int_0^1 \mathrm{H}(x,\xi)\,\mathrm{H}(\xi,y)\,d\xi$$

risulti, per $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, una funzione continua di x e di y, non identicamente nulla, ed inferiore ad una quantità finita M: inoltre ogni integrale $\int_0^1 \varphi(\xi)\,\mathrm{H}(\xi,x)d\xi$ risulti una funzione finita e continuata di x, per $0 \leq x \leq 1$, sempre che $\varphi(\xi)$ sia nel campo $(0\,1)$ una funzione integrabile, insieme al suo quadrato in senso di Lebesgue. Ancora $\mathrm{H}(\xi,x)$ costituisca nel quadrato di lato $(0\,1)$ un nucleo *quasi definito*, nel senso spiegato al n. 4 della nostra precedente Nota II: *Sull'estensione del teorema di Riesz-Fisher*. Dette $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ i valori eccezionali del nucleo $\mathrm{H}(\xi,x)$; $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots$ le funzioni eccezionali corrispondenti, in modo che si abbia

$$\Phi_n(x)+\lambda_n\int_0^1 \Phi_n(x)\,\mathrm{H}(\xi,x)\,d\xi = 0\,,$$

le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ sono tutte negative e si possono ordinare in una successione procedente secondo l'ordine crescente dei loro valori assoluti: se, come avviene in generale, esse sono in numero infinito, la successione $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \ldots$ tende, al crescere di n al limite $-\infty$.

Supponiamo infine che $g(x,t)$ sia una funzione reale, derivabile rispetto a t, finita e continua insieme alla $\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}$ per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$, t_0 essendo una quantità fissa.

Ciò posto, diremo che $u(x\,,t)$ è un integrale *regolare* della (1) allorquando $u(x,t)$ verifica alla (1); ed è inoltre una *finita e continua per* $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$ *senza eccezione*, derivabile rispetto a t, la derivata $\dfrac{\partial u(x\,,t)}{\partial t}$ essendo una funzione integrabile parzialmente rispetto ad x nell'intervallo $(0\,1)$, in senso di Lebesgue, qualunque sia $t \geq t_0$.

Ci proponiamo di dimostrare:

1°) Che un integrale regolare della (1) è determinato in modo unico per tutti i valori di t superiori a t_0, allorquando si conoscono i valori che esso assume per $t = t_0$.

2°) Che la condizione necessaria e sufficiente, perchè esista un'integrale regolare della (1), che per $t = t_0$ assuma i valori di una funzione data $h(x)$ (finita e continua per $0 \leq x \leq 1$) è che sia risolubile l'equazione integrale di prima specie

$$\int_0^1 \theta(\xi)\, \mathrm{H}(\xi\,,x)\, d\xi = g(x\,,t_0) - h(x),$$

l'integrale del primo membro essendo inteso nel senso di Lebesgue, $\theta(\xi)$ essendo nell'intervallo $(0\,1)$ una funzione integrabile in senso di Lebesgue.

3°) Che, se la condizione precedente è verificata, l'integrale regolare della (1) che assume per $t = t_0$ i valori di $h(x)$, può esser rappresentato mediante la serie

$$g(x\,,t) - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \left\{ \mathrm{A}_n e^{\lambda_n(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_n(t-\tau)}\, \mathrm{B}_n(\tau)\, d\tau \right\}, \tag{2}$$

ove si è posto:

$$\mathrm{A}_n = \int_0^1 \{ g(x\,,t_0) - h(x) \}\, \Phi_n(x)\, dx \quad , \quad \mathrm{B}_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial g(x\,,t)}{\partial t}\, \Phi_n(x)\, dx. \tag{3}$$

La serie (2) converge assolutamente ed uniformemente rispetto alla x nel campo $(0\,1)$, per qualunque valore di $t \geq t_0$.

2. **Teorema I.** — *Un integrale regolare della* (1) *è determinato in modo unico per tutti i valori di t superiori a* t_0, *allorquando si conoscono i valori che esso assume per* $t = t_0$.

Evidentemente basterà dimostrare che un integrale regolare dell'equazione omogenea

$$u(x\,,t) + \int_0^1 \frac{\partial u(\xi\,,x)}{\partial t}\, \mathrm{H}(\xi\,,x)\, d\xi = 0 \tag{4}$$

che si annulla per $t = t_0$, è identicamente nullo per tutti i valori di $t > t_0$.

Dalla (4) si deduce, moltiplicando ambo i membri per $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}dx$, ed integrando da 0 a 1 rispetto ad x

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^1 (u(x,t))^2\,dx\right)+\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mathrm{H}(\xi,x)\,d\xi\,dx=0,$$

ed integrando rispetto a t da t_0 ad una quantità $\tau > t_0$, ricordando che che, per ipotesi è $u(x,t_0)=0$, si deduce

$$\frac{1}{2}\int_0^1 (u(x,\tau))^2\,dx+\int_{t_0}^{\tau}dt\int_0^1\int_0^1 \frac{\partial u(\xi,t)}{\partial t}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mathrm{H}(\xi,x)\,d\xi\,dx=0.$$

Siccome $\mathrm{H}(\xi,x)$ è per ipotesi un nucleo quasi definito così nessuno dei due termini, che sono al primo membro può esser negativo: debbono allora essere ambedue nulli, si ha così:

$$\int_0^1 (u(x,t))^2\,dx=0,$$

da cui segue, data la continuità della funzione $u(x,t)$

$$u(x,\tau)=0 \qquad 0\leq x\leq 1,\ \tau\geq t_0.$$

3. **Teorema II.** — *Se $u(x,t)$ è l'integrale regolare della* (1) *che per $t=t_0$ assume i valori di una funzione finita e continua $h(x)$, $u(x,t)$ è rappresentabile mediante la serie* (2)

$$u(x,t)=g(x,t)-\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\left\{\mathrm{A}_n e^{\lambda_n(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_n(t-\tau)}\mathrm{B}_n(\tau)\,d\tau\right\}, \tag{2}$$

nella quale $\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n,\ldots$ rappresentano la serie dei valori eccezionali: $\Phi_1(x),\Phi_2(x),\ldots\Phi_n(x),\ldots$ la serie delle funzioni eccezionali del nucleo $\mathrm{H}(\xi,x)$; le A_n e le B_n sono date dalle (3)

$$\mathrm{A}_n=\int_0^1 (g(x,t_0)-h(x))\,\Phi_n(x)\,dx \quad,\quad \mathrm{B}_n(t)=\int_0^1 \frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\Phi_n(x)\,dx. \tag{3}$$

La serie (2) *converge assolutamente ed uniformemente rispetto alle variabili x e t, qualunque sia x nel campo* (01), *e per qualunque valore di $t\geq t_0$.*

Sia infatti $u(x,t)$ l'integrale regolare della (1) che per $t=t_0$ assume i valori di $h(x)$: poniamo

$$v(x,t)=g(x,t)-u(x,t), \tag{5}$$

$v(x,t)$ sarà anche essa una funzione finita e continua per tutti i valori di x compresi tra 0 e 1 e per tutti i valori di $t > t_0$; derivabile inoltre rispetto a t, colla derivata $\frac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ integrabile parzialmente rispetto ad x nel campo (0 1), per qualunque valore di $t \geq t_0$. Sostituendo nella (1), ricaviamo che $v(x, t)$ può esser posta nella forma

$$v(x, t) = \int_0^1 \left\{ \frac{\partial g(\xi, t)}{\partial t} - \frac{\partial v(\xi, t)}{\partial t} \right\} \mathrm{H}(\xi, x)\, d\xi, \tag{6}$$

e da questa relazione, in forza di un teorema classico di Hilbert-Schmidt [1], *si deduce che $v(x, t)$ può essere sviluppata in una serie convergente, assolutamente ed uniformemente*, procedente per le funzioni eccezionali del nucleo $\mathrm{H}(\xi, x)$. Si può porre quindi:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\, \mathrm{Q}_n(t), \tag{7}$$

la serie del secondo membro convergendo assolutamente ed uniformemente per tutti i valori di x compresi tra 0 ed 1 e per tutti i valori di $t \geq t_0$.

Dalla (7) si deduce:

$$\mathrm{Q}_n(t) = \int_0^1 v(x, t)\, \Phi_n(x)\, dx. \tag{8}$$

[1] É il teorema seguente: *ogni funzione finita e continua $g(x)$, rappresentabile mediante un integrale definito della forma*

$$g(x) = \int_0^1 \theta(\xi)\, \mathrm{H}(\xi, x)\, d\xi$$

è sviluppabile in una serie precedente per le funzioni eccezionali $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots$ del nucleo simmetrico $\mathrm{H}(\xi, x)$, convergente assolutamente ed uniformemente in tutto l'intervallo (0 1): e si ha

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \int_0^1 g(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} - \int_0^1 \mathrm{H}(\xi, x)\, \Phi_\nu(\xi)\, d\xi \int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_\nu(\xi)\, d\xi$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ essendo i valori eccezionali del nucleo $\mathrm{H}(\xi, x)$ corrispondenti alle funzioni eccezionali $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots$ Cfr. Schmidt (*Entwickelung willkürlicher Functionen nach Systemen vorgeschriebener*. Mat. Ann. 1907, § 9); il teorema si riferisce non solo al caso in cui $\mathrm{H}(\xi, x)$, $\theta(\xi)$ sieno funzioni finite e continue senza eccezione: ma facilmente si estende anche al caso in cui sia una $\theta(\xi)$ funzione integrabile insieme al suo quadrato nell'intervallo 0 1, ed $\mathrm{H}(\xi, x)$ verifichi alle ipotesi indicate al n. 1 della presente Nota (loc. cit., § 11, Schlussbemerkung).

D'altra parte, se nella (6) moltiplichiamo ambo i membri per $\Phi_n(x)\,dx$ ed integriamo da 0 a 1, raccogliamo, tenuto conto della posizione precedente (7)

$$Q_n(t)=\int_0^1\int_0^1\left\{\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right\}H(\xi\,,x)\,\Phi_n(x)\,d\xi\,dx=$$

$$=\frac{-1}{\lambda_n}\int_0^1\left\{\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right\}\Phi_n(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\lambda_n}\,Q'_n(t)-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^1\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}\,\Phi_n(\xi)\,d\xi\,,$$

$$n=1\,,2\,,\ldots$$

$Q'_n(t)$ essendo la derivata di $Q_n(t)$.

Ricordando la posizione (3)

$$B_n(t)=\int_0^1\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}\,\Phi_n(\xi)\,d\xi\,,$$

la relazione precedente si può scrivere

$$Q'_n(t)-\lambda_n\,Q_n(t)=B_n(t)\,, \tag{9}$$

e questa, integrata, fornisce:

$$Q_n(t)=C_n\,e^{\lambda_n(t-t_0)}+\int_{t_0}^t e^{\lambda_n(t-\tau)}\,B_n(\tau)\,d\tau,$$

essendo C_n una costante. Poniamo nella equazione precedente $t=t_0$, raccogliamo, tenuto conto della (8)

$$C_n=Q_n(t_0)=\int_0^1 v(x\,,t_0)\,\Phi_n(x)\,dx\,,$$

e quindi, secondo le posizioni (3), (5) ricordando che $u(x\,,t)$ assume per $t=t_0$ i valori di $h(x)$

$$C_n=A_n=\int_0^1\left\{g(x\,,t_0)-h(x)\right\}\Phi_n(x)\,dx\,.$$

L'espressione $Q_n(t)$ diventa quindi

$$Q_n(t)=A_n\,e^{\lambda_n(t-t_0)}+\int_{t_0}^t c^{\lambda_n(t-\tau)}\,B_n(\tau)\,d\tau\,, \tag{10}$$

sostituendo nella (7) otteniamo:

$$v(x\,,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\left\{A_n\,e^{\lambda_n(t-t_0)}+\int_{t_0}^t e^{\lambda_n(t-\tau)}\,B_n(\tau)\,d\tau\right\},$$

la serie del secondo membro convergendo assolutamente ed uniformemente — come abbiamo già visto — per tutti i valori di x compresi fra 0 ed 1 e per tutti i valori di $t > t_0$. Sostituendo successivamente nella (5), ricaviamo finalmente

$$(2) \qquad u(x\,,t) = g(x\,,t) - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \left\{ A_n\, e^{\lambda_n(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_n(t-\tau)} B_n(\tau)\, d\tau \right\}.$$

Risulta così provato che, *se esiste un integrale regolare della* (1) *che prende per* $t = t_0$ *i valori di* $h(x)$, *esso è rappresentabile mediante la serie precedente* (2). Resta da ricercare *sotto quali condizioni* tale integrale effettivamente esiste: è ciò che ci proponiamo di sviluppare nella Nota II.

Chimica. — *Sulla costituzione di alcuni acidi trimetossi-ftalici* [1]. Nota di G. Bargellini e Olimpia Molina, presentata dal Socio Paternò [2].

Ossidando con $KMnO_4$ l'etere metilico della Columbamina (o etere dimetilico della Jateorizina), Feist [3] ottenne coridaldina ed un acido non azotato, insolubile nell'acqua e fusibile a 202°, il quale era probabilmente da considerarsi come un acido trimetossi-ftalico. Poichè i dati analitici ottenuti non erano sufficienti per arrivare ad una conclusione sicura sulla sua costituzione, Feist, avendo notato che i residui di questo acido, dopo la determinazione dei metossili coll'acido iodidrico, davano alcune reazioni simili a quelle del pirogallolo, suppose dapprima che fosse un acido 3-4-5-trimetossi-ftalico della formula III e cercò di prepararlo sinteticamente.

Un acido pirogallol-dicarbonico era stato ottenuto da Senhofer e Brunner [4] riscaldando a 130° in autoclavi il pirogallolo o l'acido gallico in soluzione acquosa con carbonato ammonico e più tardi da Brunner [5] con rendita migliore riscaldando per 10 ore a 180° in corrente di CO_2 l'acido gallico con bicarbonato di potassio in presenza di glicerina.

Feist lo ripreparò con quest'ultimo processo ed eterificò poi i suoi ossidrili fenici con diazometano. Ottenne così un acido trimetossi-ftalico al quale (considerando che l'acido triossi-ftalico corrispondente II era stato

[1] Lavoro eseguito nell'Istituto Chimico della R. Università di Roma.
[2] Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1912.
[3] Feist, Arch. der Pharm., 245, 586 (1907); C. B. 1908 (1) 527.
[4] Senhofer e Brunner, M., 1, 468 (1880).
[5] Brunner, A., 351, 324 (1907); C. B. 1907 (1) 1405.