ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

quei monti, non possono rappresentare, per la loro posizione, che il Daniano. Essi corrispondono litologicamente, paleontologicamente e cronologicamente ai *Weisse Kreidekalke* del Deserto libico, attribuiti giustamente al Daniano da Zittel, Wanner, Quaas e Blanckenhorn.

In riassunto, le osservazioni geologiche del Cortese e l'esame delle faune, da me eseguito, dimostrano che nelle colline lungo il Nilo e nei gruppi montuosi del Gebel Duwi e del Gebel Nakheil, tra quel fiume e Cosseir, sul Mar Rosso, si debbono distinguere, tra l'*Arenaria della Nubia* (in quei luoghi appartenente, nella sua parte superiore, al Santoniano) e i calcari eocenici, tre altri piani del Cretaceo superiore, cioè: il Campaniano, il Maëstrichtiano, ricco di fosfati, e il Daniano.

Questi risultati sono anche importanti se si pensa che quegli strati sono ancora per la massima parte riferiti all'Eocene inferiore nella Carta geologica anglo-egiziana, sebbene le notizie del Fraas e del Blanckenhorn abbiano in parte contribuito a stabilire la verità. Il Cortese è presentemente ritornato sui luoghi, sicchè avremo presto altri elementi da studio.

Matematica. — *Sulla trasformata di Tschirnhausen.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge [1].

Siano $x_1, x_2, \dots, x_n$ le n radici dell'equazione algebrica

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

e sia

$$F(\xi) = 0 \tag{2}$$

un'altra equazione algebrica, di grado n, avente le sue n radici $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ legate alle $x_1, x_2, \dots, x_n$ dalla relazione generica

$$\xi_\nu = \varphi(x_\nu) = b_0 x_\nu^m + b_1 x_\nu^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x_\nu + b_m. \tag{3}$$

La (2) è una trasformata di Tschirnhausen della (1), ed il polinomio φ si chiama polinomio trasformatore.

Un modo di ottenere $F(\xi)$ è stato esposto in una mia precedente Nota *sull'equazione alle potenze*, nei Rendiconti di questa illustre Accademia. Si scrive l'equazione in y

$$\varphi(y) = \xi, \tag{4}$$

e se ne chiamano $y_1, y_2, \dots, y_m$ le m radici; poi si scrive il polinomio *risultante*

$$F(\xi) = f(y_1)\, f(y_2) \dots f(y_m), \tag{5}$$

ed in tale modo si perviene alla trasformata di Tschirnhausen.

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1912.

Noi vogliamo qui estendere ed approfondire i concetti che ivi ci servirono, e mostrare come il calcolo simbolico delle matrici, introdotto da Cayley, e poi adoperato nel modo più semplice e più efficace da Giorgi [1], conduca a stabilire, fra teorie in apparenza diverse, impensati collegamenti.

Intanto chiameremo 1 la seguente matrice quadrata

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{Vmatrix}.$$

Essa corrisponde alla sostituzione identica.

Per somma delle due matrici $\|a_{ij}\|$ e $\|b_{ij}\|$ intenderemo la matrice $\|a_{ij}+b_{ij}\|$, ottenuta col sommare gli elementi omologhi. Il prodotto del numero k, anche irrazionale, anche complesso, per una matrice si definirà mediante la relazione $k\|a_{ij}\|=\|ka_{ij}\|$, la quale trasporta il fattore k sopra ogni elemento della matrice, Così, per esempio, la matrice quadrata

$$\begin{Vmatrix} \lambda & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda \end{Vmatrix}$$

si potrà indicare con $\lambda \cdot 1$, o anche soltanto con λ.

Come prodotto di una matrice per un'altra simile intenderemo il risultato dell'ordinaria composizione, eseguita linee per colonne.

In base a ciò, se M è una matrice, noi possiamo senz'altro intendere quale matrice sia determinata dal polinomio simbolico $\varphi(\mathrm{M}) = b_0 \mathrm{M}^m + b_1 \mathrm{M}^{m-1} + \cdots + b_{m-1} \mathrm{M} + b_m$. È noto da Cayley che ogni matrice quadrata

$$\mathrm{M} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & . & . & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

[1] Io debbo all'amichevole frequenza col prof. Giorgi le nozioni fondamentali, in parte note e in parte non ancora note, su questo calcolo simbolico, del quale egli ha, con lucida visione, già da gran tempo affermata l'importanza. Non è forse lontano il giorno nel quale si potrà, con agevole nomenclatura e con chiara successione di facili concetti, riunire in un breve e sostanziale capitolo della matematica le profonde ricerche del Pincherle ed i geniali risultati che l'algebra del trascendente deve in questi ultimi tempi al Volterra. E mi si permetta di togliere alla navigazione aerea un termine di paragone, esprimendo l'augurio che la matematica moderna possa ben presto *navigare sul cavo*, collegando la forza ascensionale delle più elette meditazioni coll'ubertoso terreno della pratica; come avveniva nel sereno tempo d'Archimede, filosofo, ingegnere ed artista.

verifica, in tale senso simbolico, l'equazione *caratteristica*

$$(7) \qquad D(M) = \begin{vmatrix} a_{11} - M & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - M & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - M \end{vmatrix} = 0 .$$

Ciò non è nuovo, come dico, e si ritrova anche subito, osservando che, se i numeri $m_1, m_2, \ldots, m_n$ sono le radici dell'equazione (7), allora la sostituzione corrispondente alla matrice $M - m_1$ ha un moltiplicatore nullo; quella corrispondente alla matrice $(M - m_1)(m - m_2)$ ne ha due; . . . . . ; quella corrispondente alla matrice $(M - m_1)(M - m_2) \ldots (M - m_n)$ ne ha n, dunque porta tutti i punti nell'origine, dunque si riduce identicamente a zero: ciò valga per un semplice richiamo.

Varie conseguenze notevoli si possono dedurre dalle cose finora esposte.

Intanto io dico che, se poniamo, al posto della (1),

$$(8) \qquad f(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0 ,$$

allora la matrice

$$\varphi(M) - \xi$$

ha per equazione caratteristica la trasformata di Tschirnhausen $F(\xi) = 0$ relativa al polinomio trasformatore φ. Ciò si dimostra abbastanza facilmente, facendo ricorso alla nozione di assi invarianti, già invocata nel mio precedente lavoro [1]. Il numero x_ν, radice di $f(x) = 0$, è il coefficiente di dilatazione lungo un asse invariante; ponendoci su tale asse, noi possiamo tradurre la relazione $f(x_\nu) = 0$ nella relazione simbolica

$$(9) \qquad M - x_\nu = 0 ;$$

infatti la trasformazione corrispondente ad M è, per i punti di quell'asse invariante, una pura e semplice moltiplicazione. La (9) si può anche scrivere, sempre in senso simbolico,

$$(10) \qquad M = x_\nu .$$

[1] Si potrebbe farne a meno, ma desiderio di brevità mi consiglia questo richiamo, ed anche l'opportunità di affermare con un facile esempio alcuni concetti dei quali mi riserbo di fare, in applicazioni alquanto più difficili, sistematico uso.

Ma allora vediamo che vale la relazione simbolica

$$\varphi(\mathrm{M}) = \varphi(x_\nu)\,, \tag{11}$$

dunque l'equazione caratteristica della matrice

$$\varphi(\mathrm{M}) - \xi$$

ha per radice il *numero* $\varphi(x_\nu)$. La conservazione degli assi invarianti da (10) a (11) è nota ed evidente. L'equazione caratteristica della matrice $\varphi(\mathrm{M}) - \xi$ ha per radice $\varphi(x_\nu)$; ma x_ν è generica, dunque tale equazione caratteristica, che è evidentemente di grado n, coincide proprio con $\mathrm{F}(\xi) = 0$.

Per esempio, poniamo

$$f(x) = \begin{vmatrix} 8-x & -6 & 1 \\ 7 & -5-x & 1 \\ 3 & -3 & 3-x \end{vmatrix}.$$

L'equazione $f(x) = 0$ ha le tre radici $1, 2, 3$. Volendo la trasformata di Tschirnhausen avente le radici ξ_1, ξ_2, ξ_3 legate alle x_1, x_2, x_3 della relazione generica

$$\xi_\nu = 2x_\nu^2 + x_\nu + 3\,,$$

dovremo formarci il polinomio simbolico

$$2\mathrm{M}^2 + \mathrm{M} + 3\,,$$

cioè

$$2\begin{Vmatrix} 8 & -6 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{Vmatrix}^2 + \begin{Vmatrix} 8 & -6 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 61 & -48 & 11 \\ 55 & -42 & 11 \\ 27 & -27 & 24 \end{Vmatrix};$$

e poi scrivere l'equazione

$$\mathrm{F}(\xi) = \begin{vmatrix} 61-\xi & -48 & 11 \\ 55 & -42-\xi & 11 \\ 27 & -27 & 24-\xi \end{vmatrix} = 0.$$

Essa deve avere le tre radici $6, 13, 24$; il che è ben facile verificare.

Notiamo che l'equazione (8) è un'equazione algebrica generale; è facile, infatti, vedere che il determinante

$$\pm\begin{vmatrix} -a_1-x & -a_2 & -a_3 & \cdot & \cdot & \cdot & -a_n \\ 1 & -x & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & -x & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & -x \end{vmatrix},$$

vale

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n\,.$$

Ma ciò rappresenta ancora ben poco rispetto alla generalità dei risultati che possono ottenersi dall'esposto ordine di considerazioni.

Intanto scriviamo l'equazione simbolica (7) come segue:

$$M^n + A_1 M^{n-1} + \cdots + A_{n-1} M + A_n = 0. \tag{12}$$

Essa potrà anche scriversi

$$M^n = - A_1 M^{n-1} - \cdots - A_{n-1} M - A_n. \tag{13}$$

Ciò permette di esprimere in modo agevole, mediante $M, M^2, \ldots, M^{n-1}$, le successive potenze di M.

Se ora noi, per esempio, poniamo al posto del polinomio $\varphi(M)$, che ci ha servito nella trasformazione precedente, la serie

$$\varphi(M) = 1 + \frac{M}{1} + \frac{M^2}{1.2} + \frac{M^3}{1.2.3} + \cdots, \tag{14}$$

che simbolicamente esprimeremo con e^M, allora il nostro procedimento e l'accorto impiego della (13) ci condurranno ad un'equazione avente per radici i numeri $e^{x_1}, e^{x_2}, \ldots, e^{x_n}$. La deduzione di ciò è analoga alla deduzione della (11), ma occorre un passaggio al limite, sul quale per ora non ci vogliamo fermare.

Partiamo, per esempio, da

$$f(x) = \begin{vmatrix} 1 - x & 2 \\ -1 & -1 - x \end{vmatrix}.$$

Le due radici di $f(x) = 0$ sono i e $-i$; l'equazione simbolica alla quale dobbiamo assoggettare la relativa matrice M è

$$M^2 + 1 = 0,$$

dunque otteniamo $M^2 = -1$, $M^3 = -M$, $M^4 = 1, \ldots$; e allora la serie (14) diventa

$$1 + \frac{M}{1} - \frac{1}{1.2} - \frac{M}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{M}{5!} - \cdots \tag{15}$$

cioè

$$\cos 1 + M \sin 1.$$

Giungeremo così all'equazione

$$F(\xi) = \begin{vmatrix} \cos 1 + \sin 1 - \xi & 2 \sin 1 \\ -\sin 1 & \cos 1 - \sin 1 - \xi \end{vmatrix} = 0,$$

evidentemente verificata da $e^i = \cos 1 + i \sin 1$, ceme da $e^{-i} = \cos 1 - i \sin 1$.

Ciò che evita, o, quanto meno, semplifica la questione della convergenza dell'algoritmo (14) è la possibilità di giungere, mediante la (13), ad un algoritmo contenente potenze di M di grado limitato.

Anche per $\frac{1}{M}$, ed in generale per le potenze negative, si può adoperare analogo artifizio. Possiamo, infatti, dalla (12) dedurre

$$\frac{1}{M} = -\frac{1}{A_n} M^{n-1} - \frac{A_1}{A_n} M^{n-2} - \dots - \frac{A_{n-1}}{A_n}.$$

Tuttavia possiamo osservare che per la convergenza, specialmente se anche $f(x)$ si assoggetta ad analoga estensione (il che conduce ai determinanti d'ordine infinito), si apre qui la porta a parecchie questioni di rigore. Su queste ritornerò metodicamente, a miglior tempo, in un lavoro di maggior mole.

Matematica. — *Sopra l'integrabilita dell'equazioni differenziali della meccanica.* Nota I dell'ing. dott. Giuseppe Armellini, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. In questa Nota io mi propongo lo scopo precipuo di estendere due importanti teoremi sull'integrabilità dell'equazioni differenziali del moto di un punto, sottomesso all'azione di una forza centrale; dovuti il primo a Jacobi [2], il secondo al Mestschersky [3] *mostrando che essi non sono altro che due casi particolari di un unico teorema assai più generale, che passo ora ad enunciare e dimostrare.*

A tale scopo immaginiamo di avere un punto P, che per semplicità supporremo di massa unitaria, mobile sotto l'azione di una forza F, la cui linea passi sempre per un centro fisso O; poichè, come è noto, l'orbita di P giace in un piano α passante per O, scegliendo quest'ultimo punto come polo, potremo sempre riferirla ad un sistema di coordinate polari r e ϑ. Ciò posto, io dico che ha luogo il seguente:

Teorema. « L'equazioni differenziali del moto del punto P, sono sempre « integrabili con sole quadrature, tutte le volte che la forza F ha la forma, « $F = \frac{\varphi(\vartheta)}{r^2(at+b)}$; dove φ è una funzione della sola ϑ, t è un tempo e a « e b sono costanti arbitrarie ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1912.

[2] *De motu puncti singularis,* Crelle, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, Band 24; vedi anche Jacobi's Gesammelte Werke, Band IV.

[3] Astr. Nachr., Band 159.