ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Ciò che evita, o, quanto meno, semplifica la questione della convergenza dell'algoritmo (14) è la possibilità di giungere, mediante la (13), ad un algoritmo contenente potenze di M di grado limitato.

Anche per $\frac{1}{M}$, ed in generale per le potenze negative, si può adoperare analogo artifizio. Possiamo, infatti, dalla (12) dedurre

$$\frac{1}{M} = -\frac{1}{A_n} M^{n-1} - \frac{A_1}{A_n} M^{n-2} - \dots - \frac{A_{n-1}}{A_n}.$$

Tuttavia possiamo osservare che per la convergenza, specialmente se anche $f(x)$ si assoggetta ad analoga estensione (il che conduce ai determinanti d'ordine infinito), si apre qui la porta a parecchie questioni di rigore. Su queste ritornerò metodicamente, a miglior tempo, in un lavoro di maggior mole.

Matematica. — *Sopra l'integrabilita dell'equazioni differenziali della meccanica.* Nota I dell'ing. dott. GIUSEPPE ARMELLINI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

1. In questa Nota io mi propongo lo scopo precipuo di estendere due importanti teoremi sull'integrabilità dell'equazioni differenziali del moto di un punto, sottomesso all'azione di una forza centrale; dovuti il primo a Jacobi [2], il secondo al Mestschersky [3] *mostrando che essi non sono altro che due casi particolari di un unico teorema assai più generale, che passo ora ad enunciare e dimostrare.*

A tale scopo immaginiamo di avere un punto P, che per semplicità supporremo di massa unitaria, mobile sotto l'azione di una forza F, la cui linea passi sempre per un centro fisso O; poichè, come è noto, l'orbita di P giace in un piano α passante per O, scegliendo quest'ultimo punto come polo, potremo sempre riferirla ad un sistema di coordinate polari r e ϑ. Ciò posto, io dico che ha luogo il seguente:

Teorema. « L'equazioni differenziali del moto del punto P, sono sempre « integrabili con sole quadrature, tutte le volte che la forza F ha la forma, « $F = \frac{\varphi(\vartheta)}{r^2(at+b)}$; dove φ è una funzione della sola ϑ, t è un tempo e a « e b sono costanti arbitrarie ».

(1) Pervenuta all'Accademia il 29 luglio 1912.

(2) *De motu puncti singularis,* Crelle, Journal fur die reine und angewandte Mathematik, Band 24; vedi anche Jacobi's Gesammelte Werke, Band IV.

(3) Astr. Nachr., Band 159.

Questo unico teorema, come si vedrà, racchiude in sè, quali casi particolari i due risultati del Jacobi e del Mestschersky; considerandone l'impostanza, io ne darò due dimostrazioni: la prima mostrando l'integrabilità dell'equazioni di Lagrange a cui perverremo; l'altra facendo uso del fecondissimo metodo di trasformazioni, introdotto in analisi e in meccanica principalmente dall'Appell nella sua classica Memoria: *De l'homographie en mécanique* [1].

2. Prendiamo sul piano α un sistema di coordinate rettangolari xy e uno di coordinate polari $r\vartheta$, con l'origine comune in 0; e in modo che l'asse x coincida con l'asse polare da cui vengono contate le anomalie ϑ. Indicando al solito con X e Y le componenti della forza F sugli assi x e y; e con T la semiforza viva di P, avremo:

$$(1)\qquad \begin{cases} T = \dfrac{1}{2}\left\{\left(\dfrac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\dfrac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} \\[2ex] X = \dfrac{\varphi(\vartheta)}{r^2(at+b)}\cos\vartheta \qquad\qquad x = r\cos\vartheta \\[2ex] Y = \dfrac{\varphi(\vartheta)}{r^2(at+b)}\operatorname{sen}\vartheta \qquad\qquad y = r\operatorname{sen}\vartheta. \end{cases}$$

Scegliendo quindi, come parametri Lagrangiani q_1 e q_2, le coordinate polari r e ϑ, l'equazioni fondamentali del moto di Lagrange:

$$(2)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = X\frac{\partial x}{\partial q_i} + Y\frac{\partial y}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2)$$

divengono, indicando al solito con apici le derivate rispetto al tempo:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} - r\vartheta'^2 = \dfrac{\varphi(\vartheta)}{r^2(at+b)} \\[2ex] \dfrac{d}{dt}(r^2\vartheta') = 0. \end{cases}$$

La seconda delle (3) ci dà subito:

$$(4)\qquad r^2\vartheta' = c\ ,\qquad r = \sqrt{\frac{c}{\vartheta'}}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c}{\vartheta'^3}}\,\vartheta'' \\[2ex] \dfrac{d^2r}{dt^2} = \dfrac{3}{4}\sqrt{\dfrac{c}{\vartheta'^5}}\,\vartheta''^2 - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{c}{\vartheta'^3}}\,\vartheta''' \end{cases}$$

[1] V. American Journal of Matematics, vol. XII; vedi anche: Comptes Rendus, tomo CVIII.

sostituzioni che trasformano la prima delle (3) nella:

$$\frac{3}{4}\frac{\vartheta''^2}{\sqrt{\vartheta'^7}}-\frac{1}{2}\frac{\vartheta'''}{\sqrt{\vartheta'^5}}-\sqrt{\vartheta'}=\frac{\varphi(\vartheta)}{(at+b)\sqrt{c^3}} \tag{6}$$

equazione differenziale del terzo ordine in ϑ, contenente tutte le derivate, la funzione e la variabile indipendente t. Dico che il suo integrale può ottenersi con sole quadrature.

Poniamo a tale scopo:

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\mu(\vartheta)}{(at+b)^2}, \tag{7}$$

dove $\mu(\vartheta)$ è una funzione della sola ϑ che si tratta di determinare.

Differenziando la (7) abbiamo con facili riduzioni:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2}=\frac{\mu(\vartheta)}{(at+b)^4}\frac{d\mu}{d\vartheta}-2a\frac{\mu(\vartheta)}{(at+b)^3} \tag{8}$$

$$\frac{d^3\vartheta}{dt^3}=\frac{[\mu(\vartheta)]^2}{(at+b)^6}\frac{d^2\mu}{d\vartheta^2}+\frac{\mu(\vartheta)}{(at+b)^6}\left(\frac{d\mu}{d\vartheta}\right)^2- -\frac{6a\mu(\vartheta)}{(at+b)^5}\frac{d\mu}{d\vartheta}+6a^2\frac{\mu(\vartheta)}{(at+b)^4}. \tag{9}$$

ciò che trasforma la (6) in

$$\frac{1}{2\sqrt{\mu(\vartheta)}}\frac{d^2\mu}{d\vartheta^2}-\frac{1}{4\sqrt{[\mu(\vartheta)]^3}}\left(\frac{d\mu}{d\vartheta}\right)^2+\sqrt{\mu(\vartheta)}=-\frac{(\varphi\vartheta)}{a\sqrt{c^3}} \tag{10}$$

che può essere anche scritta sotto la forma più semplice:

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left[\sqrt{\mu(\vartheta)}\right]+\sqrt{\mu(\vartheta)}=-\frac{\varphi(\vartheta)}{a\sqrt{c^3}}. \tag{11}$$

Siamo così giunti ad un'equazione lineare, con secondo membro, nella funzione $\sqrt{\mu(\vartheta)}$ la cui soluzione è data dall'espressione:

$$\sqrt{\mu(\vartheta)}=\mathrm{A}\cos\vartheta+\mathrm{B}\,\mathrm{sen}\,\vartheta+\mathrm{K}(\vartheta), \tag{12}$$

dove A e B sono costanti arbitrarie, e $\mathrm{K}(\vartheta)$ può ottenersi, come è noto dalla teoria delle equazioni differenziali lineari, con sole quadrature.

Ciò posto dalla (7) si ha separando le variabili e integrando:

$$\frac{1}{at+b}=-a\int\frac{d\vartheta}{\mu(\vartheta)}+c_1 \tag{13}$$

e quindi risolvendo rispetto a ϑ, dopo eseguite le quadrature:

$$\vartheta = \psi(t) \tag{14}$$

espressione che sostituita nella (4) ci dà:

$$r = \sqrt{\frac{c}{\psi'(t)}}\,. \tag{15}$$

La (14) e la (15) risolvono il sistema differenziale (3) e in esse compariscono, come appunto doveva avvenire, quattro costanti arbitrarie; la costante delle aree c, la costante c_1 introdotta dalla funzione $\psi(t)$, e le due costanti A e B che entrano nella $\mu(\vartheta)$.

Siamo quindi giunti ad integrare l'equazioni di Lagrange relative al problema studiato, con sole operazioni di quadratura c. d. d.

Ed ora, prima di passare alla seconda dimostrazione del teorema, che, come ho già detto, io fondo sul metodo delle trasformazioni omografiche in meccanica, mi sia permesso di riassumere in poche linee, i risultati a cui perviene il fondatore di questo metodo, l'Appell, nella Memoria citata.

I) Tutte le volte che si sa trovare il moto di un punto Q di coordinate $x_1\, x_2 \ldots x_{3n}$ in un S_{3n} (o il moto di un sistema di n punti nello spazio ordinario) sotto l'azione di una forza F, dipendente solamente dalla posizione del mobile Q, se ne deduce per mezzo della trasformazione omografica:

$$X_i = \frac{a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + \cdots a_{i3n}\, x_{3n} + a_{i3n+1}}{\alpha_1\, x_1 + \alpha_2\, x_2 \qquad + \alpha_{3n}\, x_{3n} + \alpha_{3n+1}} \tag{16}$$

$$(i = 1\,, 2\,, \ldots 3n)$$

sostituendo contemporaneamente il tempo t, con un nuovo tempo T definito dall'equazione:

$$d\mathrm{T} = \frac{dt}{(\alpha_1\, x_1 \qquad + \alpha_{3n}\, x_{3n} + \alpha_{3n+1})^2}\,, \tag{17}$$

il moto di un nuovo punto $X_1\, X_2 \ldots X_{3n}$ sollecitato da una forza F_1 dipendente solamente dalla posizione del mobile.

La traiettoria del secondo punto è la trasformata omografica di quella del primo; la retta secondo la quale è diretta la forza F_1 è, nell'istante T, la trasformata omografica della retta secondo cui è diretta la forza F nell'istante t.

II) Questa trasformazione è la sola per la quale la forza F_1 non dipende dalla velocità, qualunque sia la legge della forza F in funzione della posizione del mobile Q.

Ciò posto l'equazioni differenziali del moto del punto P sul piano α, riferito agli assi rettangolari xy con l'origine O, sono:

$$(18)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{x\varphi(\vartheta)}{r^3(at+b)} = 0 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{y\varphi(\vartheta)}{r^3(at+b)} = 0 \end{cases}$$

sistema di cui dobbiamo dimostrare l'integrabilità.

A tale scopo eseguiamo la trasformazione, analoga per molti rispetti a quella d'Appell:

$$(19)\qquad \mathrm{X} = \frac{x}{at+b}\ ,\quad \mathrm{Y} = \frac{y}{at+b}\ ,\quad \mathrm{T} = \frac{1}{a(at+b)}$$

da cui ricaviamo con brevi calcoli e riduzioni:

$$(20)\qquad \frac{dx}{dt} = -(at+b)^{-1}\frac{d\mathrm{X}}{d\mathrm{T}} + a\mathrm{X}\ ,\quad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{(at+b)^3}\frac{d^2\mathrm{X}}{d\mathrm{T}^2},$$

$$(21)\qquad \frac{dy}{dt} = -(at+b)^{-1}\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{T}} + a\mathrm{Y}\ ,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{(at+b)^3}\frac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{T}^2}.$$

D'altro lato chiamando con θ e R l'anomalia e il raggio vettore del punto P_1 di coordinate XY, immagine di P abbiamo:

$$(22)\qquad \varphi(\vartheta) = \varphi\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\mathrm{Y}}{\mathrm{X}}\right) = \varphi(\theta),$$

$$(23)\qquad r^3 = (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = (at+b)^3\,(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{\mathrm{R}^3}{\mathrm{T}^3a^3},$$

e quindi, operando sulle (18) le sostituzioni (20), (21), (22), (23), otteniamo l'equazioni differenziali del moto del punto immagine P_1 sotto la forma:

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\mathrm{X}}{d\mathrm{T}^2} + \dfrac{\mathrm{X}}{\mathrm{R}^3}\varphi(\theta) = 0 \\ \dfrac{d^2\mathrm{Y}}{d\mathrm{T}^2} + \dfrac{\mathrm{Y}}{\mathrm{R}^3}\varphi(\theta) = 0\,. \end{cases}$$

Ma le (24) sono integrabili [1]; avremo dunque:

$$(25)\qquad \begin{cases} \mathrm{X} = \Phi_1(\mathrm{T}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4) \\ \mathrm{Y} = \Phi_2(\mathrm{T}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4), \end{cases}$$

e quindi

$$(26)\qquad \begin{cases} x = (at+b)\,\Phi_1\left[\dfrac{1}{a(at+b)}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4\right], \\ y = (at+b)\,\Phi_2\left[\dfrac{1}{a(at+b)}, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \mathrm{C}_3, \mathrm{C}_4\right], \end{cases}$$

[1] V. Appell, *Traité de Méc. Rat.*, I, pag. 386 (Troisième édition).

dove C_1, C_2, C_3, C_4 sono costanti arbitrarie. Le (26) sono gli integrali del sistema (18), che in tal modo possiamo conoscere con sole operazioni di quadratura c. d. d.

CASI PARTICOLARI. — Esaminiamo ora due casi particolari di grande importanza del teorema dimostrato:

Caso I: $a = 0$.

Includendo la costante b nella funzione $\varphi(\vartheta)$, vediamo che l'equazioni differenziali del moto di un punto sottoposto a forza centrale sono integrabili, tutte le volte che la forza F ha la forma $F = \frac{\varphi(\vartheta)}{r^2}$. È questo precisamente il risultato del Jacobi, che si enuncia affermando la risolubilità del problema del moto centrale, quando F è un'espressione omogenea di grado -2 nelle coordinate xy (Jacobi, loc. cit.).

Caso II. $\varphi(\vartheta) =$ costante.

La forza F è allora data dall'espressione $F = \frac{C}{r^2(at+b)}$, dove c è una costante; l'equazioni sono ancora integrabili. È questo il risultato del Mestschersky (Mestschersky, loc. cit.).

Riepilogando: i due teoremi, dovuti al Jacobi e al Mestschersky sopra l'integrabilità delle equazioni della meccanica, benchè a prima vista differentissimi, non sono altro che casi particolari dell'unico teorema da me ora dato, il quale li comprende e li racchiude ambedue, ed ha un'estensione assai piu generale.

Chimica-fisica. — *Sulla tendenza a combinarsi fra alogenuri e fosfati dello stesso metallo. - I. Cloruri e fosfati alcalini* (1). Nota di MARIO AMADORI, presentata dal Socio G. CIAMICIAN (2).

Il diverso comportamento dei cloruri e dei floruri alcalini verso i solfati, e l'interesse che può presentare per molti composti che si trovano in natura, m'hanno indotto a studiare termicamente il comportamento dei cloruri e dei fluoruri verso i fosfati dello stesso metallo.

Infatti le coppie cloruro potassico - solfato potassico, studiata da Jänecke (3), e cloruro sodico - solfato sodico, studiata da Jänecke e da Wolters (4), non

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Padova, diretto dal prof. G. Bruni.

(2) Pervenuta all'Accademia il 22 luglio 1912.

(3) Zeit. f. phys. Ch., *64*, 343 (1908).

(4) N. Jahrb. f. Min. u. Geol. B. B., *30*, 57 (1910).