ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Contribuzione allo studio dello sviluppo dei murenoidi (Memorie del Comitato talassografico, 1910), possa appartenere all'anguilla per il numero dei miomeri corrispondente press' a poco a quello dell'anguilla e allontanantesi da quello di tutti gli altri murenoidi del Mediterraneo.

Si potrebbe sospettare che il Giglioli fosse stato ingannato dai suoi fornitori, che come pesce del Mediterraneo gli avrebbero venduto un pesce forestiero; la cosa però sembra poco probabile.

Meccanica. — *Sopra le vibrazioni normali di un corpo elastico immerso in un fluido.* Nota II di E. Laura, presentata dal Socio C. Somigliana.

Sfera vibrante radialmente in un fluido.

3. Faccio le posizioni:

a, b = velocità di propagazione delle onde longitudinali e trasversali nel fluido;

c = velocità di propagazione delle onde longitudinali nel fluido;

ϱ, ϱ_1 = densità rispettive della sfera e del fluido;

R = raggio della sfera;

$u(r, t)$ = spostamento radiale nella sfera;

$\Phi(r, t)$ = potenziale di velocità nel fluido.

Tanto la sfera quanto il fluido non sono sollecitati da forze di masse; il moto puramente radiale nella sfera è individuato da condizioni iniziali opportunamente date. Il fluido inizialmente è in quiete, e le vibrazioni della sfera generano in esso un sèguito di onde sferiche propagantisi all'esterno del vibratore con velocità c.

Le equazioni indefinite del moto saranno:

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \dfrac{2}{r^2}\,u + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) & r \leq \mathrm{R} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = c^2\,\dfrac{\partial^2 . r\Phi}{\partial r^2} & r \geq \mathrm{R}. \end{cases}$$

La solita ipotesi della continuità della tensione e della velocità normale attraverso la superficie del vibratore dà le equazioni in superficie:

$$(8) \qquad \begin{cases} \varrho\left[a^2\,\dfrac{\partial u}{\partial r} + (a^2 - 2b^2)\,\dfrac{2u}{r}\right] = -\,\varrho_1\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\,\dfrac{\partial \Phi}{\partial r} \end{cases} \qquad r = \mathrm{R}.$$

Sul bordo dell'onda che si propaga nel fluido si ha la condizione

$$(9) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + c \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \qquad r = \mathrm{R} + ct.$$

Per soddisfare alla 2ª delle (7) e tenendo presente che nel fluido si hanno solo onde progressive devesi porre,

$$(10) \qquad \Phi = \frac{1}{r} \mathrm{F}\left(t - \frac{r - \mathrm{R}}{c}\right).$$

La (9) per questa posizione si riduce semplicemente a

$$(11) \qquad \mathrm{F}(0) = 0.$$

Quindi le equazioni del problema divengono:

$$\mathrm{I)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2}{r^2} u + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad r \leq \mathrm{R}$$

$$\mathrm{II)} \qquad \varrho\left[a^2 \frac{\partial u}{\partial r} + (a^2 - 2b^2)\frac{2u}{r^2}\right] = -\frac{\varrho_1}{\mathrm{R}} \mathrm{F}'(t) \qquad r = \mathrm{R}$$

$$\mathrm{III)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\mathrm{R}^2} \mathrm{F}(t) + \frac{1}{c\mathrm{R}} \mathrm{F}'(t) \qquad r = \mathrm{R}$$

$$\mathrm{IV)} \qquad \mathrm{F}(0) = 0.$$

La $u(r, t)$ è regolare per i valori di r dell'intervallo $0 - \mathrm{R}$, e la funzione F, poichè nell'espressione del potenziale di velocità si ha

$$\mathrm{R} < r \leq \mathrm{R} + ct$$

è definita per valori positivi o nulli dell'argomento.

Alle equazioni I), II), III), IV) bisognerà aggiungere le condizioni iniziali di spostamento e velocità nella sfera.

L'unicità della soluzione deriva ancora dal teorema delle forze vive. Posto:

$$2\mathrm{W} = \varrho\left(a^2 - \frac{4}{3}b^2\right)\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right)^2 + \frac{4}{3}b^2\varrho\left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r}\right)^2,$$

sarà W il potenziale elastico unitario nella sfera. Quindi l'equazione delle forze vive, acquista la forma:

$$\int_0^{\mathrm{R}} \left[\frac{\varrho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \mathrm{W}\right]_0^t 4\pi r^2\, dr = \int_0^t \left(\mathrm{T}\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{r=\mathrm{R}} 4\pi \mathrm{R}^2\, dt,$$

nella quale si è indicata con T la tensione sopra la superficie sferica. Tenendo conto della II) e della III) e IV), questa equazione diviene:

$$(12)\qquad \int_0^{R}\left[\frac{\varrho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+W\right]_0^t 4\pi r^2\,dr+\frac{\varrho_1}{2R^3}F^2(t)+\frac{\varrho_1}{cR^2}\int_0^t F'(t)^2\,dt=0\,.$$

Se ora si ha:

$$\int_0^{R}\left[\frac{\varrho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+W\right]_{t=0} 4\pi r^2\,dr=0,$$

consegue:

$$u=0\,;$$

quindi con un ragionamento analogo a quello fatto al n. 1 consegue l'unicità della soluzione.

4. Veniamo alla considerazione delle vibrazioni normali. Soddisfiamo alla I), II), III) con il porre:

$$\begin{cases} F(t)=\mu e^{\lambda t} \\ u(r\,,t)=e^{\lambda t}u(r)\,, \end{cases}$$

essendo λ , μ costanti da determinarsi. Per soddisfare alla I) poichè la $u(r\,,t)$ è regolare per

$$r=0$$

dovrò porre:

$$u(r)=\frac{d}{dr}\,\frac{\operatorname{Sen}\frac{\lambda}{a}r}{r}\,.$$

Le II) e III) divengono con ciò:

$$\varrho\left[a^2\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{\operatorname{Sen}\frac{\lambda}{a}r}{r}\right)+(a^2-2b^2)\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{\operatorname{Sen}\frac{\lambda}{a}r}{r}\right)\right]_{r=R}=-\frac{\varrho_1}{R}\mu\lambda$$

$$\lambda\frac{d}{dr}\left(\frac{\operatorname{Sen}\frac{\lambda}{a}r}{r}\right)_{r=R}=\frac{\mu}{R^2}+\frac{\mu\lambda}{cR}\,.$$

Si elimini μ tra queste due equazioni e si ponga:

$$\frac{\lambda R}{a}=x.$$

Dopo qualche riduzione si perviene all'equazione trascendente:

$$(B)\qquad \frac{\operatorname{Tang}x\,(1+px^2)-x}{x-\operatorname{Tang}x}=-\frac{mx^2}{1+nx}\,,$$

nella quale si son fatte le posizioni:

$$\frac{\varrho_1 a^2}{4\varrho b^2} = m \quad ; \quad \frac{a}{c} = n \quad ; \quad \frac{a^2}{4b^2} = p.$$

L'equazione (B) ha ufficio analogo a quello dell'equazione di frequenza nel caso delle vibrazioni libere. Ad ogni radice x_n di essa corrisponde una coppia di valori

$$\lambda_n \, , \, \mu_n$$

e quindi le due soluzioni semplici:

$$\begin{cases} u_n(r\,,\,t) = e^{\lambda_n t} u_n(r) \\ \mathrm{F}_n(t) = \mu_n \, e^{\lambda_n t}. \end{cases}$$

Queste formule *non* definiscono una vibrazione normale, esse non soddisfano invero la IV). Combiniamo due di questi moti semplici corrispondenti a due diverse radici di (A) ponendo:

$$(15) \qquad \begin{cases} u_{mn}(r\,,\,t) = \mu_n \, e^{\lambda_m t} u_m(r) - \mu_m \, e^{\lambda_n t} u_n(r) \\ \mathrm{F}_{mn}(t) = \mu_m \, \mu_n (e^{\lambda_m t} - e^{\lambda_n t}). \end{cases}$$

È allora evidente che si ha

$$\mathrm{F}_{mn}(0) = 0$$

e quindi pure la IV) è soddisfatta.

Dimostriamo che la equazione (B) ha le radici complesse coniugate con parte reale negativa. La semplice ispezione di questa equazione rivela l'assenza di radici immaginarie pure, quindi tra le vibrazioni normali non ve ne possono essere delle armoniche semplici.

Si dimostra che l'equazione (B) nell'ipotesi [1]:

$$m < np$$

ha una sola radice reale negativa (questa dimostrazione sarà data in un prossimo lavoro). La discussione diretta delle radici di (B) è malagevole, benchè si possa fare ricorrendo al noto metodo dei residui di Cauchy. Stabiliamo una relazione integrale tra le $u_m(r)$.

Sieno $u(r\,,\,t)\,,\,\mathrm{F}(t)\;;\;u_1(r\,,\,t)\,,\,\mathrm{F}_1(t)$ due coppie di soluzioni delle I), II), III). Con una integrazione per parti, dalla I) si ricava:

$$(16) \qquad \varrho \int_0^{\mathrm{R}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u_1 - \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} u \right) 4\pi r^2 \, dr = (\mathrm{T} u_1 - \mathrm{T}_1 u)_{r=\mathrm{R}} \, 4\pi \mathrm{R}^2,$$

[1] Questa ipotesi è la corrispondente della

$$m < 1$$

fatta nel caso della lastra vibrante.

dove T, T_1 indicano le tensioni sulla sfere relative agli spostamenti u, u_1. La (16) può essere scritta direttamente come applicazione del teorema di reciprocità. Tenendo conto della II) si ha allora:

$$(17)\qquad \frac{\varrho}{\varrho_1}\int_0^{R}\left(\frac{\partial^2 u}{dt^2}\,u_1-\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}\,u\right)4\pi r^2\,dr=$$
$$=4\pi R[u]_{r=R}\,F_1'(t)-4\pi R[u_1]_{r=R}\,F'(t).$$

Si ponga in essa:

$$u=e^{\lambda_m t}\,u_m(r)\quad,\quad u_1=e^{\lambda_n t}\,u_n(r)$$
$$F(t)=\mu_m\,e^{\lambda_m t}\quad,\quad F_1(t)=\mu_n\,e^{\lambda_n t}\,,$$

essendo $\dfrac{\lambda_m R}{a}$, $\dfrac{\lambda_n R}{a}$ due radici di (B). Con facili riduzioni si ottiene:

$$\frac{\varrho}{\varrho_1}(\lambda_m^2-\lambda_n^2)\int_0^{R}u_m(r)\,u_n(r)\,4\pi r^2\,dr=$$
$$=-\frac{4\pi}{R}\,\mu_m\,\mu_n\left(\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_m}\right)-\frac{4\pi}{c}\,\mu_m\,\mu_n(\lambda_m-\lambda_n).$$

E posto:

$$\lambda_m\neq\lambda_n$$

avremo:

$$(18)\qquad \frac{\varrho}{\varrho_1}\int_0^{R}u_m(r)\,u_n(r)\,r^2\,dr+\frac{\varrho_1}{R}\,\frac{\mu_m\,\mu_n}{\lambda_m\,\lambda_n(\lambda_m+\lambda_n)}+\frac{\varrho_1}{c}\,\frac{\mu_m\,\mu_n}{\lambda_m+\lambda_n}=0.$$

Se $\lambda_m\,\lambda_n$ sono quanlità complesse coniugate, tali saranno pure $\mu_m\,\mu_n$, $u_m\,u_n$. Saranno quindi reali e positivi i prodotti

$$\lambda_m\,\lambda_n\;,\;\mu_m\,\mu_n\;,\;u_m(r)\,u_n(r).$$

La (18) dà allora:

$$\lambda_m+\lambda_n<0.$$

E poichè $\lambda_m+\lambda_n$ è il doppio della parte reale delle radici coniugate considerate consegue che questa è *negativa.*

Riassumendo otteniamo: *se una sfera elastica vibra radialmente in un fluido come vibrazione normale in essa possiamo assumere la seguente*

$$u(r,t)=\mu_m\,e^{\lambda_n t}\,u_m(r)-\mu_n\,e^{\lambda_m t}\,u_n(r),$$

nella quale le

$$\frac{\lambda_n R}{a}=x_n$$

sono radici della equazione (B), *e inoltre si ha*:

$$u_m(r) = \frac{d}{dr} \frac{\operatorname{Sen} \frac{\lambda_m r}{a}}{r}$$

$$\mu_m = \lambda_m \frac{u_m(\mathrm{R})}{\frac{1}{\mathrm{R}^2} + \frac{\lambda_m}{c\mathrm{R}}}.$$

Le vibrazioni così definite per la proprietà prima dimostrata sono combinazioni di *vibrazioni armoniche smorzate*.

Tra i moti semplici (soluzioni delle equazioni I), II), III) ne esiste solo uno aperiodico (quello relativo all' unica radice reale di (B) nell' ipotesi

$$m < np.$$

Per le (15), in questa stessa ipotesi, si conclude però subito che non possono sussistere nella sfera, e quindi neanche nel fluido, *moti aperiodici*.

Matematica — *Sull'equazione integro-differenziale di tipo parabolico.* Nota di G. C. Evans, presentata dal Socio Vito Volterra (1).

§ 1. — L'equazione della propagazione ereditaria.

Volendo estendere una ricerca (2) sulle equazioni integro-differenziali a casi che non si possono ridurre, per mezzo di un simbolismo conveniente, al trattamento di un'equazione puramente differenziale, cioè ai casi di equazioni « non statiche » (3), e sapendo che il prof. Volterra stava studiando l'equazione integro-differenziale di tipo iperbolico, mi son proposto il problema di trattare l'equazione integro-differenziale di tipo parabolico. Le equazioni di questi ultimi tipi, che noi considereremo, contengono alla stessa volta e una derivata rispetto al tempo, e dei coefficienti ereditari che coinvolgono il tempo, fatto che ci impedisce di ridurle simbolicamente alle pure

(1) Presentata nella seduta del 16 giugno 1912.

(2) *L'algebra delle funzioni permutabili e non permutabili*, capitolo 3. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, tomo XXXIV, adunanza del 14 aprile 1912, pp. 1-28.

(3) V. Volterra, *Sulle equazioni della elettrodinamica*, articolo 4. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, ser. 5a, 1° sem., fasc. 5°, marzo, 1909.