ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Fisica matematica. — *Formule del Green e metodi del Betti nella teoria del moto lento dei liquidi viscosi.* Nota I di Umberto Crudeli, presentata dal Corrisp. A. Di Legge [1].

Nella teoria del moto lento dei fluidi viscosi incomprensibili contempliamo due rami di ricerche, intendendo poste nel primo ramo tutte quelle ricerche che riguardano la *costruzione* di moti, e nel secondo ramo le rimanenti ricerche.

I moti non stazionarii.

1. Un pregevole contributo ad entrambi i rami di ricerche è stato portato dal sig. C. W. Oseen con diversi suoi lavori, in particolare con le sue « formules de Green généralisées qui se présentent dans l'hydrodinamique et sur quelques unes de leurs applications » [2]. Formule che vengono stabilite (inspirandosi appunto al procedimento del Green) col sussidio di un sistema di soluzioni singolari del sistema di equazioni

$$\left\{\begin{aligned} -\varrho \frac{\partial u'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial \xi} + \mu \Delta^2 u' \\ -\varrho \frac{\partial v'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial \eta} + \mu \Delta^2 v' \\ -\varrho \frac{\partial w'}{\partial t} &= -\frac{\partial p'}{\partial \zeta} + \mu \Delta^2 w' \\ \frac{\partial u'}{\partial \xi} + \frac{\partial v'}{\partial \eta} &+ \frac{\partial w'}{\partial \zeta} = 0 \end{aligned}\right.$$

che dicesi sistema aggiunto rispetto al sistema delle equazioni del moto lento

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho \frac{\partial u}{\partial t} &= X - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \mu \Delta^2 u \\ \varrho \frac{\partial v}{\partial t} &= Y - \frac{\partial p}{\partial \eta} + \mu \Delta^2 v \\ \varrho \frac{\partial w}{\partial t} &= Z - \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \mu \Delta^2 w \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} &+ \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 . \end{aligned}\right.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1912.
[2] Acta mathematica, 1911, pag. 205

Io qui, seguendo altri criterî, mi propongo di mostrare come, *qualora si voglia restare nel secondo ramo di ricerche, qualora, cioè, non si miri anche a costruire contemporaneamente delle soluzioni del sistema* (1), *ma si voglia soltanto operare sopra soluzioni del sistema* (1), si può stabilire direttamente un sistema di formule valevole per il moto continuo lento dei fluidi viscosi, omogenei ed incompressibili, dei quali si consideri una porzione interna. Un sistema di formule, cioè, il quale sussista *necessariamente* per ogni sistema di soluzioni delle (1) (intendendo, ben inteso, che quest'ultimo sia della natura che verrà indicata quì appresso). Nei primi membri delle formule in discorso figureranno rispettivamente u, v, w, p nell'interno della porzione di fluido considerata (la p a meno di una funzione del tempo, soltanto del tempo, come sarà qui appresso naturale) e nei secondi membri, oltre alle costanti assegnate ϱ e μ e, sotto segni di integrali, alle componenti delle assegnate forze di massa ed a funzioni ben note della teoria del potenziale o della teoria della propagazione del calore, figureranno soltanto, sotto segni di integrali, *nel senso che risulterà in seguito manifesto*, le seguenti quantità (quantità che, ricordiamolo incidentalmente, non potrebbero, per esuberanza di condizioni, assegnarsi ad arbitrio) cioè le u, v, w sul contorno della porzione di fluido considerata, durante tutto il decorso del tempo, le $\frac{du}{dn}, \frac{dv}{dn}, \frac{dw}{dn}$ (derivate normali) sul contorno stesso, durante tutto il medesimo decorso del tempo, e, trattandosi di moti non stazionarî, le u, v, w nell'istante iniziale t_0 in tutta la porzione di fluido considerata.

Noi intenderemo implicitamente che le u, v, w, soddisfino alle restrizioni poste dal sig. Oseen.

2. Indicheremo con $\omega(t)$ lo spazio (per ipotesi limitato) occupato dalla porzione di fluido considerata, al tempo t, e con $S(t)$ il *contorno della porzione di fluido medesima* (ben inteso di natura tale da rendere lecite le nostre operazioni). Per brevità, scriveremo ω ed S. E intenderemo che durante tutto il decorso del tempo, che si suppone di considerare, la natura del contorno S sia tale da rendere lecite le nostre operazioni.

Inoltre, con u_n indicheremo, sul contorno, la componente normale della velocità del fluido. Sarà, quindi,

$$u_n = u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz .$$

Ciò premesso, vogliamo, anzitutto, mostrare come la formula, che trovasi fra quelle del sig. Oseen (valevole per ogni punto *interno* dello spazio ω) [1]

$$(2) \qquad 4\pi p(x, y, z, t) = \int_\omega \left\{ X(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \right\} d\omega -$$
$$- \int_S \left\{ \left(\mu \frac{du}{dn} - p \cos nx + \varrho\, u\, u_n\right) \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \right\} dS +$$
$$+ \mu \int_S \left\{ u \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \right\} dS + \varrho \frac{\partial}{\partial t} \int_S \left(u \cos nx + \cdots\right) \frac{dS}{r} ,$$

[1] Loc. cit., pag. 223.

può ottenersi, nel nostro caso, direttamente, per altra via, senza ricorrere al sistema aggiunto considerato dal sig. Oseen. A tale scopo, incomincio con l'osservare che, avendosi, *nell'interno*, in virtù della formula ordinaria del Green,

$$4\pi u = \int_s u \frac{d\frac{1}{r}}{dn} dS - \int_s \frac{1}{r}\frac{du}{dn} dS - \int_\omega \frac{1}{r} \Delta^2 u \, d\omega$$

e le due analoghe relative a v e w e che essendo

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial t} = X - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \mu \Delta^2 u$$

$$\varrho \frac{\partial v}{\partial t} = Y - \frac{\partial p}{\partial \eta} + \mu \Delta^2 v$$

$$\varrho \frac{\partial w}{\partial t} = Z - \frac{\partial p}{\partial \zeta} + \mu \Delta^2 w \, ,$$

dove

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}$$

risulta, *nell' interno* [1],

$$(3) \qquad 4\pi\mu \, u(x, y, z, t) = \mu \int_s u \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} dS - \mu \int_s \frac{1}{r}\frac{du}{dn} dS +$$

$$+ \int_\omega \frac{X}{r} d\omega - \varrho \int_\omega \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t} d\omega - \int_\omega \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \xi} d\omega =$$

$$= \mu \int_s u \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} dS - \mu \int_s \frac{1}{r}\frac{du}{dn} dS +$$

$$+ \int_\omega \frac{X}{r} d\omega - \varrho \int_\omega \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t} d\omega - \frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \frac{p}{r} d\omega + \int_s \frac{p \cos nx}{r} dS \, ,$$

e le due analoghe, che indicheremo rispettivamente con (4) e (5).

Ora, si ponga

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\xi}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{dt}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{\partial}{\partial \zeta} \, ,$$

da cui

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\delta}{\delta t} - \left\{ \frac{d\xi}{dt}\frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{d\eta}{dt}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{\partial}{\partial \zeta} \right\} .$$

[1] Quando diremo nell'interno, intenderemo sempre nell'interno della porzione di fluido considerata.

Inoltre venga indicata con σ una porzione (fissa) di spazio, limitata da una superficie sferica s di raggio h, la quale sia, durante un certo intervallo di tempo $\tau_1 \tau_2$, interna alla massa fluida considerata ed abbia il centro nel punto (x, y, z) che riguardiamo ora come un punto *fisso* dello spazio. Con ω' indicheremo, durante l'intervallo $\tau_1 \tau_2$, lo spazio che si ottiene togliendo σ da ω.

Avremo, durante il suddetto intervallo $\tau_1 \tau_2$ del tempo,

$$\int_{\omega'} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} d\omega' = \int_{\omega'} \frac{\partial \left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t} d\omega' =$$

$$= -\int_{\omega'} \left\{ u \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u}{r}\right) + v \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{r}\right) + w \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u}{r}\right) \right\} d\omega' + \int_{\omega'} \frac{\delta \left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega' .$$

Ma

$$\lim_{h=0} \int_{\omega'} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} d\omega' = \int_{\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} d\omega .$$

Sicchè, durante l'intervallo stesso, scrivendosi (per definizione)

$$\lim_{h=0} \int_{\omega'} \frac{\partial \left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t} d\omega' = \int_{\omega} \frac{\partial \left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t} d\omega$$

e

$$\lim_{h=0} \int_{\omega'} \frac{\delta \left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega' = \int_{\omega} \frac{\delta \left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega$$

sarà

$$\int_{\omega} \frac{\partial \left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t} d\omega = -\int_{\omega} \left\{ u \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{u}{r}\right) + v \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{r}\right) + w \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{u}{r}\right) \right\} d\omega + \int_{\omega} \frac{\delta \left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega .$$

Ovvero, tenendo presente che $\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0$, avremo

$$\int_{\omega} \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} d\omega = \int_{\omega} \frac{\partial \left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t} d\omega = \int_{s} \frac{u\, u_n}{r} dS + \int_{\omega} \frac{\delta \left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega .$$