# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

## RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXI.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**


MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

*pervenute all'Accademia durante le ferie del* **1912.**

(Ogni Memoria o Nota porta a pie' di pagina la data d'arrivo)

Matematica. — *Sopra un'equazione integro-differenziale di tipo parabolico.* Nota II del dott. Luigi Amoroso, presentata dal Corrispondente G. Lauricella.

4. Riprendendo le considerazioni e le notazioni della nostra precedente Nota 1, dimostriamo il seguente

**Teorema III.** — *Condizione necessaria e sufficiente perché esista un integrale regolare della equazione* (1)

$$(1)\qquad u(x\,,t)+\int_0^1\frac{\partial u(\xi\,,t)}{\partial t}\,\mathrm{H}(\xi\,,x)\,d\xi=g(x\,,t)$$

*che per $t=t_0$ assuma i valori di una funzione data $h(x)$, finita e continua nell'intervallo* (01), *è che esista una funzione $\theta(\xi)$, integrabile in senso di Lebesgue insieme al suo quadrato nell'intervallo* (01), *che verifichi all'equazione integrale di prima specie:*

$$(11)\qquad \int_0^1\theta(\xi)\,\mathrm{H}(\xi\,,x)\,d\xi=g(x\,,t_0)-h(x)\,,$$

*l'integrale del primo membro essendo preso nel senso di Lebesgue.*

Infatti, sia $u(x\,,t)$ un integrale regolare della (1) (nel senso definito al n. 1 della Nota C [1]), che per $t=t_0$ assuma i valori di $h(x)$: dalla (1)

[1] Cfr. errata-corrige alla fine della presente Nota. Diremo A, B, C le nostre Note pubblicate nei precedenti fascicoli. *Sopra un'estensione del teorema di Riesz-Fisher*, Nota I (A); Nota II (B). *Sopra un'equazione integro-differenziale del tipo parabolico*, Nota I (C).

consegue allora, posto $t = t_0$,

$$\int_0^1 \left(\frac{\partial u(\xi , t)}{\partial t}\right)_{t=t_0} \mathrm{H}(\xi , x)\, d\xi = g(x , t_0) - h(x),$$

e quindi $\theta(\xi) = \left(\frac{\partial u(\xi , t)}{\partial t}\right)_{t=t_0}$ verifica alla (11), ed è inoltre (in forza della definizione di integrale regolare) una funzione integrabile rispetto a $\xi$, insieme al suo quadrato, in senso di Lebesgue, nell'intervallo (0 1). La condizione enunciata è quindi effettivamente necessaria.

Dimostriamo che è sufficiente. Per ciò supponiamo che l'equazione (11) ammetta una soluzione $\theta(\xi)$ integrabile, in senso di Lebesgue, insieme al suo quadrato, nell'intervallo (0 1). Poniamo $\gamma(x , t) = \frac{\partial g(x , t)}{\partial t}$; per le ipotesi fatte (cfr. n. 1 della Nota C), $\gamma(x , t)$ è una funzione finita e continua per $0 \leq x \leq 1$, qualunque sia $t \geq t_0$. Ciò fatto, costruiamo le espressioni

$$(12) \quad \mathrm{A}_n = \int_0^1 (g(x , t_0) - h(x))\, \Phi_n(x)\, dx = \int_0^1\!\!\int_0^1 \theta(\xi)\, \mathrm{H}(\xi , x)\, \Phi_n(x)\, d\xi\, dx,$$

$$(13) \quad \mathrm{B}_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial g(x , t)}{\partial x} \Phi_n(x)\, dx = \int_0^1 \gamma(x , t)\, \Phi_n(x)\, dx,$$

$$(14) \quad \mathrm{Q}_n(t) = \mathrm{A}_n e^{\lambda_n(t-t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\lambda_n(t-\tau)} \mathrm{B}_n(\tau)\, d\tau$$

$$n = 1 , 2 , \ldots$$

A questo punto occorre applicare i risultati ottenuti nelle nostre due Note precedenti, (A) e (B), e precisamente il risultato contenuto nel teorema della Nota (B). Ciò è lecito perchè le funzioni $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots$, e le costanti $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots$ che figurano nelle espressioni (12), (13), (14), sono rispettivamente le funzioni eccezionali ed i valori eccezionali di un nucleo $\mathrm{H}(\xi , x)$, che gode delle proprietà presupposte al n. 4 della stessa Nota (B), e analogamente per le funzioni $\gamma(x, t), \theta(x)$. Possiamo così affermare che esiste una funzione $v(x , t)$, *finita e continua per* $0 \leq x \leq 1 , t_0 \leq t$, derivabile rispetto a $t$, colla derivata $\frac{\partial v}{\partial t}$ *integrabile parzialmente rispetto a* $x$, *insieme al suo quadrato, in senso di Lebesgue, nell'intervallo* (0 1), *qualunque sia* $t \geq t_0$, e per la quale si ha:

$$(15) \quad \int_0^1 [v(x , t)]^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{Q}_n(t))^2 \qquad \int_0^1 v(x , t)\, \Phi_m(x)\, dx = \mathrm{Q}_m(t)$$

$$\int_0^1 \frac{\partial v(x , t)}{\partial t} \Phi_m(x)\, dx = \mathrm{Q}'_m(t)$$

$$m = 1 , 2 , \ldots$$

*la serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(Q_n(t))^2$ *convergendo uniformemente rispetto a* $t$, *per* $t \geq t_0$ [1].

Essendo così stabilita l'esistenza della funzione $v(x, t)$, poniamo

$$u(x,t) = g(x,t) - v(x,t). \tag{16}$$

*Dico che* $u(x,t)$ *è l'integrale regolare della* (1) *che per* $t = t_0$ *assume i valori di* $h(x)$. Osserviamo perciò anzitutto che, in forza della definizione (16), $u(x,t)$ è una funzione finita e continua per $0 \leq x \leq t$, $t \geq t_0$, derivabile rispetto a $t$ colla derivata $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ integrabile parzialmente rispetto a $x$, insieme al suo quadrato, in senso di Lebesgue, nell'intervallo (01), qualunque sia $t \geq t_0$. Se quindi riusciamo a provare che esso è un integrale della (1), potremo senz'altro affermare che è un integrale *regolare*.

Passiamo a dimostrare che $u(x,t)$ è effettivamente un integrale della (1). Perciò osserviamo che dalla (14), derivando rispetto a $t$, si ottiene immediatamente:

$$Q_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} Q'_n(t) - \frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 \gamma(x,t)\,\Phi_n(w)\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Sostituiamo per $\gamma(x,t)$ l'espressione $\dfrac{\partial g(x,t)}{\partial t}$, per $Q_n(t)$, $Q'_n(t)$ le espressioni (15), avremo:

$$\int_0^1 v(x,t)\,\Phi_n(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_n}\int_0^1\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\right)\Phi_n(x)\,dx = Q_n(t) \tag{17}$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Consideriamo l'espressione:

$$\varepsilon^2 = \int_0^1\left\{v(x,t) - \int_0^1\left(\frac{\partial g(\xi,t)}{\partial t} - \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}\right)H(\xi,x)\,d\xi\right\}^2 dx =$$
$$= \int_0^1 [v(x,t)]^2\,dx - 2\int_0^1\int_0^1 v(x,t)\left(\frac{\partial g(\xi,t)}{\partial t} - \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}\right)H(\xi,x)\,d\xi\,dx$$
$$+ \int_0^1\left(\int_0^1\left(\frac{\partial g(\xi,t)}{\partial t} - \frac{\partial v(\xi,t)}{\partial t}\right)H(\xi,x)\,d\xi\right)^2 dx.$$

Dalla prima delle (15) raccogliamo:

$$\int_0^1 [v(x,t)]^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}(Q_n(t))^2.$$

[1] In sostanza, la funzione $v(x,t)$, di cui viene indirettamente provata l'esistenza, altro non è che la funzione rappresentata dalla serie $\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(x)\,Q_n(t)$, e che figura alla formula (7) della Nota (C).

D'altra parte, applicando un noto teorema di Hilbert e tenendo presenti le (17), si ha:

$$\int_0^1\int_0^1 v(x\,,t)\left(\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right)\mathrm{H}(\xi\,,x)\,d\xi\,dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 v(x\,,t)\,\Phi_n(x)\,dx\int_0^1\left(\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right)\Phi_n(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{Q}_n(t))^2;$$

e finalmente, per il teorema di Hilbert-Schmidt

$$\int_0^1\left\{\int_0^1\left(\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right)\mathrm{H}(\xi\,,x)\,d\xi\right\}^2dx=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\left(\int_0^1\left(\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right)\Phi_n(\xi)\,d\xi\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Q}_n(t))^2.$$

Ne segue

$$\varepsilon^2=\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Q}_n(t))^2-2\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Q}_n(t))^2+\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{Q}_n(t))^2=0\,,$$

ovvero

$$\int_0^1\left\{v(x\,,t)-\int_0^1\left(\frac{\partial g(\xi\,t.)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right)\mathrm{H}(\xi\,,x)\,d\xi\right\}^2dx=0.$$

Osserviamo che, secondo quanto è stato detto, $v(x\,,t)$ è una funzione continua per $0\leq x\leq 1$, qualunque sia $t\geq t_0$. D'altra parte $\left(\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right)$ è una funzione integrabile parzialmente rispetto a $\xi$, insieme al suo quadrato in senso di Lebesgue, nell'intervallo $(0\,1)$, qualunque sia $t\geq t_0$: onde, per le ipotesi contenute al n. 1 della Nota (A), relativamente al nucleo $\mathrm{H}(\xi\,,x)$, si ha che anche

$$\int_0^1\left(\frac{\partial g(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right)\mathrm{H}(\xi\,,x)\,d\xi$$

è una funzione continua per $0\leq x\leq 1$. Segue allora, dalla equazione precedente,

$$v(x\,,t)=\int_0^1\left(\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}-\frac{\partial v(\xi\,,t)}{\partial t}\right)\mathrm{H}(\xi\,,x)\,d\xi,\tag{18}$$

da cui, tenendo presente che $u(x\,,t)$, secondo la (16), è uguale alla differenza $g(x\,,t)-v(x\,,t)$, si raccoglie immediatamente che $u(x\,,t)$ è un integrale della (1).

Resta da provare che, per $t = t_0$, si ha $u(x, t_0) = h(x)$. Perciò osserviamo che dalla (18) si deduce, tenute presenti le (15):

$$(19) \qquad v(x, t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \int_0^1 v(\xi, t_0)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\, Q_n(t_0).$$

D'altra parte, siccome per ipotesi la funzione $g(x, t_0) - h(x)$ è rappresentabile mediante l'integrabile definito $\int_0^1 \theta(\xi)\, H(\xi, x)\, d\xi$, così si avrà ancora, tenute presente le (12) e (14),

$$(20) \qquad g(x, t_0) - h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \int_0^1 [g(\xi, t_0) - h(\xi)]\, \Phi_n(\xi)\, d\xi =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\, Q_n(t_0).$$

I due sviluppi (19) e (20) coincidono; si ha quindi

$$(21) \qquad v(x, t_0) = g(x, t_0) - h(x),$$

da cui segue, senz'altro, $u(x, t_0) = h(x)$.

6. Nei teoremi I, II (della Nota (C), e nel teorema III (della presente Nota) sono contenuti tutti i risultati, enunciati al n. 1 della Nota (C).

Resta dunque stabilito che la condizione necessaria e sufficiente perchè esista un integrale *regolare* della equazione

$$(1) \qquad u(x, t) + \int_0^1 \frac{\partial u(\xi, t)}{\partial t} H(\xi, x)\, d\xi = g(x, t)$$

che per $t = t_0$ assuma i valori di una funzione data finita e continua $h(x)$, è che sia risolubile l'equazione integrale di prima specie

$$\int_0^1 \theta(\xi)\, H(\xi, x)\, d\xi = g(x, t_0) - h(x),$$

la funzione incognita $\theta(\xi)$ dovendo essere integrabile insieme al suo quadrato, in senso di Lebesgue nell'intervallo 0 1 (teorema III). Tale integrale è unico (teorema I). Esso può essere rappresentato mediante la serie

$$g(x, t) - \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x) \left\{ A_n e^{\lambda_n(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_n(t-\tau)} B_n(\tau)\, d\tau \right.$$

$$A_n = \int_0^1 [g(x, t_0) - h(x)]\, \Phi_n(x)\, dx$$

$$B_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial g(x, t)}{\partial t} \Phi_n(x)\, dx,$$

convergente assolutamente ed uniformemente rispetto alle variabili $x$, $t$ qualunque sia $x$ nel campo $0\,1$, qualunque sia $t \geqq t_0$ [1].

7. *Osservazione I.* — Non vogliamo mancar di osservare come l'equazione (1) — secondo il concetto classico di Volterra — può esser considerata come limite di un sistema di infinite equazioni differenziali con infinite incognite. Supponiamo diviso l'intervallo $0\,,1$ in parti uguali $0\alpha_1$, $\alpha_1\alpha_2$, ..., $\alpha_n 1$; detti $u_i(t)$, $u_i'(t)$, $g_i(t)$, i valori che le funzioni $u(x\,,t)$, $\frac{\partial u(x\,,t)}{\partial t}$, $g(x\,,t)$ assumono per $x=\alpha_i$: e detti $\alpha_{ik}$ i valori che $\mathrm{H}(\xi\,,x)$ assume per $\xi=\alpha_i$, $x=\alpha_k$, l'equazione proposta (1) può considerarsi come il limite del sistema differenziale

$$u_i(t)+\sum_{j=1}^{j=n} a_{ji}\,u_i'(t)=g_i(t) \qquad j=1\,,2\,,\dots n\,. \tag{22}$$

Il metodo che abbiamo applicato per l'integrazione dell'equazione trascendente (1) non differisce in sostanza dal metodo classico di D'Alembert per l'integrazione del sistema (22).

8. *Osservazione II.* — Lo studio fatto per l'equazione (1) può estendersi — senza che si incontrino difficoltà — al caso in cui, invece di una sola variabile $x$, si considerino più variabili $x$, $y$, $z$. Esso quindi si estende direttamente alla equazione

$$u(x\,,y\,,z\,,t)+\int_{\mathrm{S}}\frac{\partial u(\xi\,,\eta\,,\zeta\,,t)}{\partial t}\,\mathrm{H}(\xi\,,\eta\,,\zeta|x\,,y\,,z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta= \\ =g(x\,,y\,,z\,,t)\,, \tag{23}$$

S essendo nello spazio delle variabili $x$, $y$, $z$ un campo fisso a tre dimensioni (che non varia col variare di $t$).

Se, come vogliamo supporre, la funzione $g(x\,,y\,,z\,,t)$ ammette tutte le derivate fino a un certo ordine $n$ rispetto alle variabili $x$, $y$, $z$, e tali derivate sono, come $g(x\,,y\,,z\,,t)$, finite e continue in tutto lo spazio S e per tutti i valori di $t \geqq t_0$; se inoltre $\mathrm{H}(\xi\,,\eta\,,\tau|x\,,y\,,z)$ è una funzione tale, che, $\theta(\xi\,,\eta\,,\zeta)$ essendo una funzione integrabile in senso di Lebesgue, insieme al suo quadrato, entro S, le derivate parziali, fino a un certo ordine $n$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^\lambda\, y^\mu\, z^\nu}\left(\int_{\mathrm{S}}\theta(\xi\,,\eta\,,\zeta)\,\mathrm{H}(\xi\,,\eta\,,\zeta|x\,,y\,,z)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta\right)$$

$$\lambda\,,\mu\,,\nu=0\,,1\,,2\,,3\,,4\,,\dots n \qquad \lambda+\mu+\nu=n\,,$$

[1] La convergenza di questa serie risulta indirettamente in forza dei teoremi II e III: direttamente è stabilita, al lemma II della Nota (B).

esistano tutte, e sieno finite e continue in tutto lo spazio S e per tutti i valori di $t > t_0$: allora dalla (23) risulta che ogni integrale regolare della (1) ammette anche esso tutte le derivate parziali dei primi $n$ ordini rispetto alle variabili $x, y, z$, e tali derivate sono finite e continue in tutto lo spazio S e per tutti i valori di $t \geq t_0$.

ERRATA CORRIGE.

Al numero 1 della Nota (C) invece che « diremo che $u(x, t)$ è un integrale regolare della (1), ecc..... la derivata $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ essendo una funzione integrabile parzialmente rispetto ad $x$, nell'intervallo 0 1, in senso di Lebesgue qualunque sia $t > t_0$ » occorre leggere « diremo ecc......., la derivata $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ essendo una funzione integrabile parzialmente rispetto ad $x$, nell'intervallo 0 1, *insieme al suo quadrato*, in senso di Lebesgue, qualunque sia $t \geq t_0$ ».

## Meccanica. — *Sul moto di una massa liquida che conserva la forma ellissoidale*. Nota di Tommaso Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

Il problema della determinazione dei casi possibili di movimento di una massa fluida incompressibile, le cui particelle si attraggono colla legge di Newton, nell'ipotesi che la sua superficie, soggetta a pressione costante, conservi la forma di un ellissoide (i cui assi variano durante il movimento) è stato posto da Dirichlet (a. 1860), il quale ha anche trovato e studiato certi casi semplici di movimento. In seguito il problema è stato oggetto di ricerche da parte di Riemann e di varî altri (Dedekind, Brioschi, Betti, Padova, Greenhill, Basset, Tedone), i quali (Riemann sovra tutto) vi hanno apportato notevoli contributi.

Recentemente, il problema è stato ripreso dallo Stekloff [2], il quale, con metodo diverso, ottiene altre equazioni differenziali del problema, che gli permettono di compiere una più profonda analisi della questione, e di determinare così varî nuovi casi di movimento.

Il procedimento adoperato dallo Stekloff per stabilire le sue equazioni e tre loro integrali (scalari), è molto complesso; vi si ricorre ai soliti assi fissi e mobili, alla trasformazione delle equazioni idrodinamiche di Eulero

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1912.

[2] W. Stekloff, *Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible*, ecc., Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris, 3e série, tom. 25 e 26, anni 1908, 1909.