ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

sono radici della equazione (B), *e inoltre si ha*:

$$u_m(r) = \frac{d}{dr} \frac{\operatorname{Sen} \frac{\lambda_m r}{a}}{r}$$

$$\mu_m = \lambda_m \frac{u_m(\mathrm{R})}{\frac{1}{\mathrm{R}^2} + \frac{\lambda_m}{c\mathrm{R}}}.$$

Le vibrazioni così definite per la proprietà prima dimostrata sono combinazioni di *vibrazioni armoniche smorzate*.

Tra i moti semplici (soluzioni delle equazioni I), II), III) ne esiste solo uno aperiodico (quello relativo all'unica radice reale di (B) nell'ipotesi

$$m < np.$$

Per le (15), in questa stessa ipotesi, si conclude però subito che non possono sussistere nella sfera, e quindi neanche nel fluido, *moti aperiodici*.

Matematica — *Sull'equazione integro-differenziale di tipo parabolico*. Nota di G. C. Evans, presentata dal Socio Vito Volterra (1).

§ 1. — L'equazione della propagazione ereditaria.

Volendo estendere una ricerca (2) sulle equazioni integro-differenziali a casi che non si possono ridurre, per mezzo di un simbolismo conveniente, al trattamento di un'equazione puramente differenziale, cioè ai casi di equazioni « non statiche » (3), e sapendo che il prof. Volterra stava studiando l'equazione integro-differenziale di tipo iperbolico, mi son proposto il problema di trattare l'equazione integro-differenziale di tipo parabolico. Le equazioni di questi ultimi tipi, che noi considereremo, contengono alla stessa volta e una derivata rispetto al tempo, e dei coefficienti ereditari che coinvolgono il tempo, fatto che ci impedisce di ridurle simbolicamente alle pure

(1) Presentata nella seduta del 16 giugno 1912.

(2) *L'algebra delle funzioni permutabili e non permutabili*, capitolo 3. Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo, tomo XXXIV, adunanza del 14 aprile 1912, pp. 1-28.

(3) V. Volterra, *Sulle equazioni della elettrodinamica*, articolo 4. Rendiconti della R. Accad. dei Lincei, vol. XVIII, ser. 5a, 1° sem., fasc. 5°, marzo, 1909.

equazioni differenziali. Infatti non abbiamo più in questi casi la formola fondamentale (facendo uso della notazione della Memoria citata):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi_1 \xi_2) = \xi_1 \frac{\partial \xi_2}{\partial t} + \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \xi_2 \text{ (1)}.$$

1. Nel caso della propagazione del calore, per determinare l'equazione differenziale nelle temperature $u(x, y, z, t)$ abbiamo l'eguaglianza

$$dt \int\int\int_S c^2 \frac{\partial u}{\partial t} dS = dt \int\int_\sigma k^2 \frac{\partial u}{\partial n_e} d\sigma ,$$

in cui, c^2 e k^2 essendo costanti positive, il primo membro rappresenta l'aumento della quantità di calore in uno spazio S durante il tempo dt, e il secondo, il flusso attraverso la superficie circostante σ nel tempo dt.

Supponiamo che vi sia una quantità che dipende ereditariamente da una variabile $u(x, y, z, t)$ nella maniera seguente: Per l'aumento della quantità in uno spazio S durante il tempo dt, supponiamo di avere il valore

(1) $$dt \int\int\int_S G \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_{t_0}^{t} dS ,$$

e per il flusso attraverso la superficie σ, il valore

(2) $$dt \int\int_\sigma F \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right]_{t_0}^{t} d\sigma ,$$

in cui le G, F sono due *funzioni di linea* dipendenti dalle $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial u}{\partial n}$ rispettivamente, durante il tratto di tempo $t_0 \, t$. In questo modo è ammessa la considerazione dei tempi anteriori al tempo t. Per precisare queste funzioni di linea, ammettiamo le condizioni necessarie per svilupparle (²), e supponiamo di poter prescindere da tutti i termini tranne da quelli lineari nell'argomento, il che è equivalente a supporre che nel caso ereditario si ritenga

(¹) Facendo uso della combinazione di seconda specie si ha la formola

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi_1 \xi_2) = \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \xi_2 .$$

La stessa formola vale anche per la combinazione di prima specie nel caso che la $U_1(t, \tau)$, coefficiente del j della ξ_1, s'annulli per $\tau = t$.

(²) Loc. cit., V. Volterra a pag. 205.

la proprietà della sommabilità delle soluzioni (¹). Quindi, adoperando la normale esterna, avremo

$$\mathrm{F}\left[\frac{\partial u}{\partial n}\right]_{t_0}^{t} = h^2 \frac{\partial u(x\,,y\,,z\,.\,t)}{\partial n} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{H}(t\,,\tau)\,\frac{\partial u(x\,,y\,,z\,,\tau)}{\partial n}\,d\tau$$

$$\mathrm{G}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_{t_0}^{t} = e^2 \frac{\partial u(x\,,y\,,z\,,t)}{\partial t} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{E}(t\,,\tau)\,\frac{\partial u(x\,,y\,,z\,,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau\,.$$

L'espressione (2) si può quindi trasformare nella seguente

$$dt \int\!\!\int\!\!\int_{\mathrm{S}} \left\{ h^2\nabla^2 u(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{H}(t\,,\tau)\,\nabla^2 u(\tau)\,d\tau \right\} d\mathrm{S}\,,$$

e l'eguaglianza delle espressioni (1) e (2) per uno spazio qualsiasi, rinchiuso nel corpo considerato, ci darà l'equazione

$$e^2 \frac{\partial u(t)}{\partial t} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{E}(t\,,\tau)\,\frac{\partial u(\tau)}{\partial \tau}\,d\tau = h^2\nabla^2 u(t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{H}(t\,,\tau)\,\nabla^2 u(\tau)\,d\tau\,.$$

Se le costanti e^2, h^2 sono differenti dallo zero possiamo fare in modo, con un cambiamento opportuno delle variabili $t\,,\tau$, che siano uguali, e risolvere l'equazione o per la $\dfrac{\partial u}{\partial \tau}$ o per la $\nabla^2 u$. Avremo dunque

$$\frac{\partial u(x\,,y\,,z\,,t)}{\partial t} = \nabla^2 u(x\,,y\,,z\,,t) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(t\,,\tau)\,\nabla^2 u(x\,,y\,,z\,,\tau)\,d\tau$$

$$\nabla^2(x\,,y\,,z\,,t) = \frac{\partial u(x\,,y\,,z\,,t)}{\partial t} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{B}(t\,,\tau)\,\frac{\partial u(x\,,y\,,z\,,\tau)}{\partial t}\,d\tau\,.$$

Per semplicità consideriamo il caso di due sole variabili, in cui abbiamo

$$\mathrm{L}(u) = \frac{\partial u(x\,,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x\,,t)}{\partial x^2} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{A}(t\,,\tau)\,\frac{\partial^2 u(x\,,t)}{\partial x^2}\,d\tau = 0 \tag{3}$$

oppure

$$\frac{\partial u^2(x\,,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x\,,t)}{\partial t} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{B}(t\,,\tau)\,\frac{\partial u(x\,,\tau)}{\partial \tau}\,d\tau = 0\,, \tag{4}$$

e consideriamo il problema al contorno, solamente della prima specie. Abbiamo il teorema seguente:

Teorema. — *Essendo limitate e integrabili le funzioni $f(x)$, per $c_1 < x < c_2$, e $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ per $t_0 < t \leqq \tau$, e tali che esista una solu-*

(¹) Loc. cit., V. Volterra a pag. 205.

zione dell'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, *regolare entro il campo* $c_1 < x < c_2$, $t_0 < t < \tau$, *che prende i valori* $f(x)$ *per* $t = t_0$, $\varphi_1(t)$ *per* $x = c_1$, *e* $\varphi_2(t)$ *per* $x = c_2$ (¹), *allora esiste una soluzione dell'equazione* (3) (*oppure* (4)), *e solamente una, regolare entro lo stesso campo, che prenda rispettivamente per* $t = t_0$, *per* $x = c_1$, *e per* $x = c_2$ *gli stessi valori* $f(x)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ (²).

2. L'equazione (4) si può evidentemente riscrivere nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathrm{B}(t\,.\,t)\,u(x\,,t) - \mathrm{B}(t\,,t_0)\,f(x) - \int_{t_0}^{t} \mathrm{B}_2(t\,,\tau)\,u(x\,,\tau)\,d\tau\,,$$

in cui con $\mathrm{B}_2(t\,,\tau)$ si indica la funzione $\frac{\partial \mathrm{B}(t\,,\tau)}{\partial \tau}$. Per dimostrare il teorema poniamo $u = u_0 + u'$, in cui la u_0 soddisfi alle condizioni seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} = -\,\mathrm{B}(t\,,t_0)\,f(x) \\ u_0(x\,,t) = u(x\,,\tau) \quad \text{per } t = t_0, \text{ per } x = c_1 \text{ e per } x = c_2\,. \end{cases}$$

Questa soluzione si trova facilmente per mezzo del teorema di Green, ed è regolare dentro il campo $c_1 < x < c_2$, $t_0 < t < \tau$. Ne risulta che la u' soddisfa all'equazione

$$(5)\qquad \frac{\partial u'}{\partial t} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = \mathrm{B}(t\,,t)\,\{u' + u_0\} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{B}_2(t\,,\mathrm{T})\,\{u'(x\,,\tau) + u_0(x\,,\tau)\}\,d\tau\,.$$

Formiamo ora la serie $\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x\,,t)$, in cui

$$\begin{cases} \frac{\partial u_n}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = \mathrm{B}(t\,,t)\,u_{n-1} - \int_{t_0}^{t} \mathrm{B}_2(t\,,\tau)\,n_{n-1}(x\,,\tau)\,d\tau \\ u_n(x\,,t) = 0 \quad \text{per } t = t_0, \text{ per } x = c_1 \text{ e per } x = c_2\,. \end{cases}$$

Abbiamo

$$u_n(x_1\,,\tau) = \lim_{t_1 = \tau} \int_{c_1}^{c_2} dx \int_{t_0}^{\tau} g(x\,,t|x_1\,,t_1) \Big\{ \mathrm{B}(t\,,t)\,u_{n-1}(x\,,t) - \\ - \int_{t_0}^{t} \mathrm{B}_2(t\,,t')\,u_{n-1}(x\,,t')\,dt' \Big\}\,dt\,,$$

(¹) Perchè esista una tale soluzione dell'equazione $\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} = \frac{\partial u}{\partial t}$ è sufficiente, per es., che i valori $\varphi_1(t)$, $f(t)$, $\varphi_2(t)$ formino una catena continua (per il problema al contorno della equazione parabolica, ved. E. E. Levi, Annali di Mat., 1908).

(²) Lo stesso teorema vale anche per l'equazione $\mathrm{L}(u) = \mathrm{F}(x\,,t)$, essendo $\mathrm{F}(x\,,t)$ limitata e integrabile rispetto a t e a x dentro il campo. Quest'ultima è l'equazione che s'incontra supponendo che si abbia il caso statico fino al tempo $t = t_0$, e il caso dinamico dal tempo t_0 in poi.

in cui $g(y, t|x, t)$, corrispondente alla funzione di Green per l'equazione parabolica, resta in valore assoluto

$$\leqq a + \frac{b}{\sqrt{(t_1 - t)}} e^{-\frac{(x-x_1)}{4(t_1-t)}},$$

essendo a e b certe costanti. Quindi si vede facilmente che si ha:

$$|u_n(x, t)| \leqq C \frac{(D(\tau - t_0))^n}{n!} \quad \text{per} \begin{cases} c_1 \leqq x \leqq c_2 \\ t_0 \leqq t \leqq \tau, \end{cases}$$

e la S è uniformemente convergente in quel campo, e, come si vede dalla ineguaglianza sopra scritta è soluzione dell'equazione (5). Ponendo $u' = S$, avremo dunque che $u = u_0 + u'$ è una soluzione dell'equazione (3) che soddisfa alle condizioni specificate.

Per dimostrare che questa soluzione è univocamente determinata, è sufficiente dimostrare che $u = 0$ è la sola soluzione regolare dell'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = B(t, t)\, u(t) - \int_{t_0}^{t} B_2(t, t)\, u(\tau)\, d\tau,$$

la quale s'annulli identicamente per $t = t_0$, per $x = c_1$, e per $x = c_2$. E infatti, applicando ancora il teorema di Green, abbiamo l'ineguaglianza

$$|u(x, t)| \leqq C' \frac{(D(\tau - t_0))^n}{n!} \quad \text{per} \quad c_1 \leqq x \leqq c_2\,, \; t_0 \leqq t \leqq \tau,$$

in cui C' è una certa costante e n è un numero intero arbitrario. Ne segue che $u(x, t)$ si annulla dappertutto nel campo $c_1 \leqq x \leqq c_2$, $t_0 \leqq t \leqq \tau$.

§ 2. — Equazioni relative.

3. L'equazione (4) è equivalente alla seguente

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a \frac{\partial u}{\partial t} + \int_{t_0}^{t} A(t, \tau) \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \tag{6}$$

purchè non sia $a = 0$. Nel caso $a = 0$, questa equazione si riduce con una integrazione per parti ad una forma analoga alla (4'):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A(t, t)\, u(x, t) - B(t, t_0) f(x) - \int_{t_0}^{t} A_2(t, \tau)\, u(x, \tau)\, d\tau,$$

caso unidimensionale dell'equazione seguente:

$$\nabla^2 u = c(x, y, z, t)\, u(x, y, z, t) + \\ + \int_{t_0}^{t} C(t, \tau)\, u(x, y, z, \tau)\, d\tau + F(x, y, z, t). \tag{6'}$$

Per questa equazione il problema al contorno si risolve in maniera completa solamente per quegli spazî che sono abbastanza piccoli, mentre che per gli spazî più grandi può avvenire in alcuni casi il fenomeno dell'oscillazione.

4. Ma se nell'equazione (6′) si ha $c(x, y, z, t) = 0$, ne ricaviamo la equazione

$$\nabla^2 u(x, y, z, t) = \int_{t_0}^{t} C(t, \tau)\, u(x, y, z, \tau)\, d\tau + F(x, y, z, t), \tag{7}$$

e di quest'ultima, nel caso del problema interno si dimostra facilmente, per mezzo del teorema di Green, che esiste una soluzione regolare, e una solamente, che prende valori arbitrarî sopra una superficie chiusa, data nello spazio x, y, z.

5. Nello svolgimento eseguito queste equazioni integro-differenziali (3), (6′), (7), si vede che sono ricondotte a certe equazioni differenziali per mezzo di approssimazioni successive. In fondo questo procedimento non è altro che ridurre ciascuna, per mezzo della soluzione di un'equazione puramente differenziale, a un'equazione puramente integrale. E infatti queste equazioni integrali, una del tipo di Fredholm, e due del tipo di Volterra, si possono immediatamente scrivere.

§ 3. — Soluzioni particolari.

6. In confronto con questi metodi di forma, che si può dire « chiusa », stanno quelli che sono basati su soluzioni particolari dell'equazione. Per l'equazione (3) si ha immediatamente, o col metodo simbolico o direttamente, che una soluzione particolare si può scrivere nella forma

$$u = R(t)\,(a \operatorname{sen} kx + b \cos kx), \tag{8}$$

in cui $R(t)$ soddisfa all'equazione

$$\frac{d\,R(t)}{dt} = -k^2 R(t) - \int_{t_0}^{t} k^2 A(t, \tau)\, R(\tau)\, d\tau,$$

ossia

$$R(t) = h - \int_{t_0}^{t} k^2 \left(1 + \int_{\tau}^{t} A(t', \tau)\, dt'\right) R(\tau)\, d\tau.$$

La soluzione di questa equazione è $R(t) = hP_k(t)$, in cui

$$P_k(t) = 1 - \int_{t_0}^{t} \overline{\left\{-k^2\left(1 + \int_{\tau}^{t} A(t', \tau)\, dt'\right)\right\}}\, d\tau$$

essendo conosciuta la $\overline{\left\{-k^2\left(1 + \int_{\tau}^{t} A(t', \tau)\, dt'\right)\right\}}$, funzione associata al nucleo dell'equazione integrale per la $R(t)$. Il prof. Volterra mi ha fatto noto, che la funzione $P_k(t)$ è una delle funzioni trascendenti esaminate da lui nel trattamento del problema delle vibrazioni ereditarie. È interessante di vedere che quelle funzioni si applicano anche qui, in un problema diverso.

La soluzione particolare $u_k = P_k(t)\,(a_k \operatorname{sen} kx + b_k \cos kx)$ ha dunque per $t = t_0$ il valore $a_k \operatorname{sen} kx + b_k \cos kx$. Quindi per la soluzione dell'equazione (3) che prende per $x = 0$ e $x = \pi$ i valori $u = 0$, e per $t = 0$ i valori arbitrarî $\varphi(x)$, si avrà

$$\begin{cases} u(x\,,t) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} a_m\, P_m(t) \operatorname{sen} mx \\ a_m = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\pi} \varphi(x) \operatorname{sen} mx\, dx\,. \end{cases}$$

Le stesse soluzioni particolari P_k servono per risolvere il problema in cui su $x = 0$ e su $x = \pi$ si ha la relazione $\dfrac{\partial u}{\partial n} = hu$, le k essendo le soluzioni della solita equazione trascendente.

7. L'equazione (7) è un'equazione del tipo statico, e può quindi essere completamente risoluta per mezzo dei metodi simbolici. Consideriamo l'equazione di questo tipo che, adoperando la notazione della sopra citata Memoria [1], possiamo scrivere nella forma simbolica seguente:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \gamma^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \delta^2 \xi, \tag{9}$$

in cui per δ prendiamo una funzione di nullità.

Una soluzione particolare di questa equazione si scrive nella forma simbolica

$$\xi = \theta(x|t\,,\tau)\,\varphi(y|t\,,\tau)\,\psi(z|t\,,\tau),$$

in cui possiamo avere, per esempio,

$$\theta = \pi_1 \operatorname{sen} m\frac{\delta}{\alpha}x + \pi_2 \cos m\frac{\delta}{\alpha}x$$

$$\varphi = \pi_1' \operatorname{sen} n\frac{\delta}{\beta}y + \pi_2' \cos n\frac{\delta}{\beta}y$$

$$\psi = \pi_1'' e^{\sqrt{1+m^2+n^2}\,\frac{\delta}{\gamma}z} + \pi_2'' e^{-\sqrt{1+m^2+n^2}\,\frac{\delta}{\gamma}z},$$

la moltiplicazione essendo sempre simbolica nel senso definito. In questa espressione i coefficienti $\pi_1 = P_1 + j\,P_1(t\,,\tau)$, ecc., si possono prendere arbitrariamente; le funzioni esponenziali si intendono quelle estensioni definite nella sopra citata Memoria [2], e le funzioni trigonometriche estese si definiscono in termini di queste per mezzo delle solite formule.

[1] Evans, loc. cit., Capitoli I, III.

[2] Evans, loc. cit. a pag. 14.