ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

esistano tutte, e sieno finite e continue in tutto lo spazio S e per tutti i valori di $t > t_0$: allora dalla (23) risulta che ogni integrale regolare della (1) ammette anche esso tutte le derivate parziali dei primi n ordini rispetto alle variabili x, y, z, e tali derivate sono finite e continue in tutto lo spazio S e per tutti i valori di $t \geq t_0$.

ERRATA CORRIGE.

Al numero 1 della Nota (C) invece che « diremo che $u(x, t)$ è un integrale regolare della (1), ecc..... la derivata $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ essendo una funzione integrabile parzialmente rispetto ad x, nell'intervallo 0 1, in senso di Lebesgue qualunque sia $t > t_0$ » occorre leggere « diremo ecc......., la derivata $\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$ essendo una funzione integrabile parzialmente rispetto ad x, nell'intervallo 0 1, *insieme al suo quadrato*, in senso di Lebesgue, qualunque sia $t \geq t_0$ ».

Meccanica. — *Sul moto di una massa liquida che conserva la forma ellissoidale.* Nota di TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA [1].

Il problema della determinazione dei casi possibili di movimento di una massa fluida incompressibile, le cui particelle si attraggono colla legge di Newton, nell'ipotesi che la sua superficie, soggetta a pressione costante, conservi la forma di un ellissoide (i cui assi variano durante il movimento) è stato posto da Dirichlet (a. 1860), il quale ha anche trovato e studiato certi casi semplici di movimento. In seguito il problema è stato oggetto di ricerche da parte di Riemann e di varî altri (Dedekind, Brioschi, Betti, Padova, Greenhill, Basset, Tedone), i quali (Riemann sovra tutto) vi hanno apportato notevoli contributi.

Recentemente, il problema è stato ripreso dallo Stekloff [2], il quale, con metodo diverso, ottiene altre equazioni differenziali del problema, che gli permettono di compiere una più profonda analisi della questione, e di determinare così varî nuovi casi di movimento.

Il procedimento adoperato dallo Stekloff per stabilire le sue equazioni e tre loro integrali (scalari), è molto complesso; vi si ricorre ai soliti assi fissi e mobili, alla trasformazione delle equazioni idrodinamiche di Eulero

[1] Pervenuta all'Accademia il 13 agosto 1912.

[2] W. Stekloff, *Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible*, ecc., Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris, 3e série, tom. 25 e 26, anni 1908, 1909.

rispetto agli assi mobili, ecc. Ciò obbliga a calcoli assai lunghi, che, per lo più, non sono riportati dall'autore.

In questa Nota, con procedimento del tutto diverso, e quanto mai semplice, stabilisco, in forma intrinseca, le equazioni del problema, e ne deduco, con calcoli brevissimi, alcuni integrali (equivalenti a sette integrali scalari), dei quali determino anche il significato meccanico.

Adopero i metodi moderni del calcolo vettoriale omografico ([1]), il quale si presenta, nel modo più naturale e spontaneo, come il più adatto allo studio della nostra questione, visto che entrano in gioco delle trasformazioni lineari. La trattazione è perciò liberata da ogni sorta di assi e coordinate, non intervenendo se non elementi meccanici strettamente inerenti al problema considerato.

L'ellissoide stesso, viene individuato, non già per mezzo della sua equazione, ma mediante la sua omografia indicatrice, e in tal modo è introdotto senz'altro nei calcoli.

Le formule risultano, in conseguenza, di una semplicità pressochè insuperabile ([2]): e i calcoli per ottenerle sono così brevi e immediati, che ho potuto esporli per intero in questo breve scritto, in cui sono ritrovati tutti i risultati dati dallo Stekloff nel cap. I della sua Memoria, con qualche risultato nuovo.

È appunto in grazia a tale semplicità, che mi è stato facile trovare nuovi integrali, oltre quelli dati dallo Stekloff; in particolare, mentre egli dimostra, con lunghi calcoli, che un certo vettore ha lunghezza costante, io ho potuto invece stabilire che il vettore stesso si mantiene invariato durante tutto il moto (il che dà due integrali in più).

Nè c'è da meravigliarsi che uno scienziato come lo Stekloff non abbia trovato il risultato, più completo, ora accennato: data l'enorma complicazione delle equazioni cartesiane, non si vedeva proprio la possibilità di poter ottenere di più.

In un'Appendice espongo poi il calcolo di due integrali, che si presentano spesso, in problemi relativi all'ellissoide.

1. Consideriamo una massa di liquido perfetto incompressibile, e indichiamo con p l'intensità della pressione in un punto qualunque P di questa massa, la cui densità, per semplicità, supporremo eguale ad 1.

Supposto poi che le forze agenti sul liquido, riferite all'unità di massa,

([1]) Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, *Omografie vettoriali con applicazioni*, ecc., Torino, G. B. Petrini, 1909. Nel seguito, questo libro verrà citato con (*O. v.*). Da poco venne alla luce, col titolo: *Transformations linéaires*, l'edizione francese (interamente rifatta e aumentata) di quest'opera. (Casa editrice: Mattei e C. Pavia).

([2]) Da esse si possono, volendo, ricavare immediatamente le equazioni cartesiane dello Stekloff.

derivino da un potenziale U, le equazioni indefinite del movimento del liquido possono scriversi sotto la forma [1]:

$$P'' = \operatorname{grad}(U - p), \tag{1}$$

$$\operatorname{div} P' = 0, \tag{2}$$

ove P', P'' indicano rispettivamente le derivate prima e seconda di P rispetto al tempo t.

La (2) altro non è che la condizione di incompressibilità della massa liquida.

A queste equazioni indefinite bisogna poi ancora aggiungere una condizione ai limiti. Sia $f(P, t) = 0$ l'equazione della superficie Σ che limita la massa liquida. In ogni punto P di detta superficie, la derivata totale di f rispetto a t sarà nulla: quindi

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{df}{dP}\frac{dP}{dt} = 0, \quad (\text{su } \Sigma);$$

od ancora (*O. v.*, pag. 50, [3]):

$$f' + \operatorname{grad} f \times P' = 0, \quad (\text{su } \Sigma), \tag{3}$$

f' essendo la derivata parziale di f rispetto a t.

Il problema si riduce alla determinazione della velocità P' e della pressione p (che sono funzioni delle variabili indipendenti P e t), per mezzo delle (1), (2), (3).

2. Supponiamo che la velocità P' sia funzione lineare (ed omogenea) del vettore $P - O$, ove O è un punto fisso. Assumiamo cioè:

$$P' = \alpha(P - O), \tag{4}$$

ove α è un'omografia vettoriale, funzione solo di t (e non di P).

È facile il vedere che, in tale ipotesi, le linee vorticose sono, in ogni istante, *rette parallele fra loro*. Infatti, l'equazione differenziale delle linee vorticose è: $\operatorname{rot}_P P' \wedge dP = 0$. Ora, ricordando anche la (4), si ha:

$$\operatorname{rot}_P P' = 2V \frac{dP'}{dP} = 2V\alpha, \tag{a}$$

dunque: $V\alpha \wedge dP = 0$; perciò, integrando: $V\alpha \wedge (P - P_0) = 0$, essendo P_0 un punto fisso (posizione iniziale di P). c. d. d.

Sostituendo poi la (4) nella (1), si ha: $\alpha'(P - O) + \alpha P' = \operatorname{grad}(U - p)$; ovvero, per la (4) stessa,

$$(\alpha' + \alpha^2)(P - O) = \operatorname{grad}(U - p). \tag{5}$$

[1] Cfr. ad esempio Burali-Forti e Marcolongo, *Éléments de calcul vectoriel* ecc., pp. 140-141, Paris, A. Hermann, 1910; oppure: Marcolongo, *Theoretische Mechanik*, Bd. II, S. 310, 312, Leipzig, G. B. Teubner, 1912.

Eliminiamo p da quest'equazione; si ha da essa:

$$\alpha' + \alpha^2 = \frac{d\,\mathrm{grad}(\mathrm{U} - p)}{d\mathrm{P}};$$

e poichè il 2° membro è una dilatazione (*O. v.*, pag. 54, [15]), ne segue la proprietà:

$$\mathbf{V}(\alpha' + \alpha^2) = 0. \tag{6}$$

La (6) potrebbe pure dedursi subito dalla nota equazione idrodinamica di Helmholtz [1].

Dopo ciò, dalla (5), ricordando una nota formula (*O. v.*, pag. 52, [9]) si deduce l'integrale seguente:

$$\mathrm{U} - p = \tfrac{1}{2}(\mathrm{P} - \mathrm{O}) \times (\alpha' + \alpha^2)(\mathrm{P} - \mathrm{O}) + h, \tag{7}$$

ove h è una funzione arbitraria di t.

Sostituendo poi la (4) nella (2), si ottiene (*O. v.*, pag. 57, [10]):

$$\mathbf{I}_1 \alpha = 0. \tag{8}$$

Sostituendo del pari nella (3), risulta:

$$f' + \mathrm{grad}\, f \times \alpha(\mathrm{P} - \mathrm{O}) = 0, \qquad (\text{su } \Sigma). \tag{9}$$

Ad ogni omografia α, funzione di t, che soddisfa alle (6), (8), (9), corrisponde un movimento possibile del liquido limitato dalla superficie Σ. La pressione idrodinamica, in ogni punto del liquido, è poi data dalla (7).

3. Supponiamo, ora, che la superficie Σ sia un ellissoide, avente per centro il punto fisso O; potremo perciò porre:

$$f(\mathrm{P}, t) = (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \times \sigma(\mathrm{P} - \mathrm{O}) - 1 = 0, \tag{10}$$

ove σ è una dilatazione, funzione di t, i cui 3 invarianti debbono necessariamente esser positivi (*O. v*, pp. 9, 11, 12).

Sostituendo nella (9), si ha (*O. v.*, pag. 52, [9]):

$$(\mathrm{P} - \mathrm{O}) \times \sigma'(\mathrm{P} - \mathrm{O}) + 2\sigma(\mathrm{P} - \mathrm{O}) \times \alpha(\mathrm{P} - \mathrm{O}) = 0, \qquad (\text{su } \Sigma),$$

od ancora: $(\mathrm{P} - \mathrm{O}) \times (\sigma' + 2\sigma\alpha)(\mathrm{P} - \mathrm{O}) = 0, \quad (\text{su } \Sigma),$
la quale, dovendo essere soddisfatta qualunque sia la direzione del vettore $\mathrm{P} - \mathrm{O}$, esprime (*O. v.*, pag. 13, [2]) che l'omografia $\sigma' + 2\sigma\alpha$ deve essere assiale, cioè: $\sigma' + 2\mathbf{D}(\sigma\alpha) = 0$, che può ancora scriversi:

$$\sigma' + \sigma\alpha + \mathbf{K}\alpha . \sigma = 0. \tag{11}$$

[1] Cfr. la mia Nota: *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'Idrodinamica*, eq. (12). Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLV, 1910.

Operando a sinistra e a destra con σ^{-1}, si deduce (*O. v.*, pag. 43, in nota):

$$(11') \qquad -(\sigma^{-1})' + \alpha\sigma^{-1} + \sigma^{-1}\mathbf{K}\alpha = 0 .$$

4. Supponiamo, infine, che le particelle liquide della massa considerata si attraggano scambievolmente colla legge di Newton.

Allora U non è altro che il valore, in punti interni, della funzione potenziale della massa omogenea racchiusa dall'ellissoide Σ definito dalla (10), il quale valore può esprimersi colla formula:

$$\mathrm{U} = \mathrm{A} - (\mathrm{P} - \mathrm{O}) \times \beta(\mathrm{P} - \mathrm{O}),$$

ove A e β sono rispettivamente un numero ed una dilatazione (funzioni solo di σ), aventi per espressione:

$$\mathrm{A} = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{\mathrm{I}_3(1 + s\sigma)}} \quad , \quad \beta = \pi \int_0^\infty \frac{(\sigma^{-1} + s)^{-1}}{\sqrt{\mathrm{I}_3(1 + s\sigma)}} ds .$$

Dalla (7) si deduce allora, per la pressione p:

$$p = \mathrm{A} - h - \tfrac{1}{2}(\mathrm{P} - \mathrm{O}) \times (\alpha' + \alpha^2 + 2\beta)(\mathrm{P} - \mathrm{O});$$

ne segue che, in ogni istante, le superficie $p = \mathrm{cost}$ sono le quadriche omotetiche indicatrici della dilatazione $\alpha' + \alpha^2 + 2\beta$.

Ciò posto, supponiamo che la superficie Σ, limitante la massa liquida, sia *libera*; allora su essa dovrà esercitarsi una pressione sempre costante, e perciò al sistema di quadriche omotetiche, ora accennato, deve appartenere pure l'ellissoide (10); dunque dovremo avere:

$$(12) \qquad \alpha' + \alpha^2 + 2\beta = -2k\sigma \quad , \quad \mathrm{A} - h + k = \mathrm{cost} ,$$

ove k è una funzione arbitraria di t.

Se diciamo $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tre vettori unitarî paralleli alle direzioni principali della dilatazione σ (*O. v.*, pag. 11), o, ciò che è lo stesso, agli assi dell'ellissoide Σ — e quindi funzioni di t — e si applicano le (11), (12) ai vettori $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, si ottengono senz'altro le 15 equazioni (40), (44), (41), (42), (43) della Memoria dello Stekloff, mentre la sua equazione (39) non è altro che la nostra (8).

5. Stabiliamo ora alcuni integrali delle (11), (12).

In primo luogo sussiste l'integrale delle forze vive, perchè esiste il potenziale delle forze; esso si scrive, indicando con S lo spazio racchiuso dall'ellissoide Σ,

$$\int_\mathrm{S} \mathrm{P}'^2 \, d\mathrm{S} - \int_\mathrm{S} \mathrm{U} \, d\mathrm{S} = \mathrm{cost} ;$$

il 2° termine, che altro non è se non il doppio dell'autopotenziale dell'ellissoide, ha il valore noto $4SA/5$; il 1° termine, ricordando la (4) e il teorema di commutazione (*O. v.*, pag. 18, [6]), si trasforma in

$$\int_S (P - O) \times \mathbf{K}\alpha \,.\, \alpha(P - O)\, dS\,,$$

che si calcola con apposita formula (cfr. Appendice), e vale $S \,.\, \mathbf{I}_1(\mathbf{K}\alpha . \alpha . \sigma^{-1})/5$; perciò, sostituendo, si ha (poichè il volume S è costante):

$$\mathbf{I}_1(\mathbf{K}\alpha \,.\, \alpha \,.\, \sigma^{-1}) - 4A = \text{cost.}$$

Questa formula concorda colla (52_1) dello Stekloff.

Un altro integrale si può ottenere come segue. Operando sulla (12) a destra con σ^{-1}, ed osservando che il prodotto $\beta\sigma^{-1}$ è una dilatazione, si ha:

$$\mathbf{V}(\alpha'\sigma^{-1}) + \mathbf{V}(\alpha^2\sigma^{-1}) = 0\,;$$

operando poi sulla (11′) a sinistra con α, ed osservando che $\alpha\sigma^{-1}\mathbf{K}\alpha$ è una dilatazione, risulta:

$$-\mathbf{V}\,[\alpha(\sigma^{-1})'] + \mathbf{V}(\alpha^2\sigma^{-1}) = 0\,;$$

perciò, sottraendo:

$$\mathbf{V}\,[\alpha'\sigma^{-1} + \alpha(\sigma^{-1})'] = \mathbf{V}(\alpha\sigma^{-1})' = 0\,,$$

cioè, integrando:

(13) $$\mathbf{V}(\alpha\sigma^{-1}) = \text{cost}\ (^1).$$

Lo Stekloff ha soltanto trovato che la lunghezza del vettore $\mathbf{V}(\alpha\sigma^{-1})$ è costante: il che è espresso dalla sua formula (50), la quale proviene dal sistema (46) che, per essere ottenuto, richiede un calcolo assai lungo (naturalmente non riportato dall'autore).

È facile il vedere che l'integrale (13) non è altro che l'integrale delle aree. Infatti, tale integrale è espresso dalla eguaglianza:

$$\int_S (P - O) \wedge P'\, dS = \text{cost}\,,$$

cioè, per la (4), $\int_S (P - O) \wedge \alpha(P - O)\, dS = \text{cost}$; e calcolando l'integrale con apposita formula (cfr. Appendice), si ritrova appunto la (13).

Infine si ottiene un altro integrale, ricorrendo all'integrale di Helmholtz (²), che esprime la conservazione del moto vorticoso. Tale integrale, ricordando la (*a*) del n. 2, si scrive:

(14) $$\mathbf{V}\alpha = \lambda \mathbf{V}\alpha_0\,,$$

(¹) Applicando la formula, facile da dimostrare: $\mathbf{V}(\beta\alpha\mathbf{K}\beta) = \mathbf{R}\beta\mathbf{V}\alpha$ (α, β omografie qualunque), è agevole il vedere che la (13) può anche porsi sotto la forma: $\sigma\mathbf{V}(\sigma\alpha) = \text{cost}$.

(²) Cfr. la mia Nota già citata, eq. (14); nel 2° membro di questa equazione va scritto $\text{rot}_{P_0}\mathbf{v}_0$, e non $\text{rot}_{P_0}\mathbf{v}$.

ove, per brevità, si è posto $\lambda = \frac{dP}{dP_0}$, essendo P_0 ed α_0 rispettivamente i valori iniziali di P ed α. La (14) si potrebbe, del resto, anche dedurre direttamente dalla (6).

La (14) può anche scriversi $\lambda^{-1}\mathbf{V}\alpha = \text{cost.}$

Da questa equazione vettoriale è facile il dedurre la seguente equazione scalare, nella quale, invece di λ, comparisce l'omografia, più semplice, σ:

$$\mathbf{V}\alpha \times \sigma\mathbf{V}\alpha = \text{cost.} \tag{15}$$

Questa equazione può però dedursi direttamente dalle (6), (8), (11) nel modo seguente: Ricordando la (8) e una nota formula (*O. v.*, pag. 22, [2]), si ha $\mathbf{V}\alpha^2 = -\alpha\mathbf{V}\alpha$: perciò, sostituendo nella (6), se ne trae:

$$(\mathbf{V}\alpha' - \alpha\mathbf{V}\alpha) \times \sigma\mathbf{V}\alpha = 0,$$

cioè successivamente, ricordando anche la (11),

$$2\mathbf{V}\alpha' \times \sigma\mathbf{V}\alpha - \mathbf{V}\alpha \times 2\mathbf{K}\alpha \,.\, \sigma\mathbf{V}\alpha = 0,$$

$$2\mathbf{V}\alpha' \times \sigma\mathbf{V}\alpha - \mathbf{V}\alpha \times (\sigma\alpha + \mathbf{K}\alpha \,.\, \sigma)\,\mathbf{V}\alpha = 0,$$

$$2\mathbf{V}\alpha' \times \sigma\mathbf{V}\alpha + \mathbf{V}\alpha \times \sigma'\mathbf{V}\alpha = (\mathbf{V}\alpha \times \sigma\mathbf{V}\alpha)' = 0,$$

da cui, integrando, risulta la (15).

La (15) concorda con la (51) dello Stekloff.

Appendice.

Se S è lo spazio racchiuso dall'ellissoide Σ, avente per equazione la (10), ed α è una omografia indipendente da P, si hanno le formule seguenti, molto importanti per le questioni relative all'ellissoide:

$$\int_S (P - O) \times \alpha(P - O)\, dS = S \,.\, \mathbf{I}_1(\alpha\sigma^{-1})/5, \tag{I}$$

$$\int_S (P - O) \wedge \alpha(P - O)\, dS = 2S \,.\, \mathbf{V}(\alpha\sigma^{-1})/5\,. \tag{II}$$

La loro dimostrazione è assai semplice. Ricorriamo al teorema della divergenza, espresso dalla formula: $\int_S \operatorname{div} \mathbf{u}\, dS = -\int_\Sigma \mathbf{u} \times \mathbf{n}\, d\Sigma$, ove $\mathbf{n}$ è il vettore unitario normale a Σ, e diretto all'interno di S; e poniamo in essa $\mathbf{u} = (P - O) \times \alpha(P - O) \,.\, (P - O)$. Allora avremo, ricordando una nota formula (*O. v.*, pag. 57, [8]):

$$\int_S [3(P - O) \times \alpha(P - O) + 2\mathbf{D}\alpha(P - O) \times (P - O)]\, dS =$$

$$= -\int_\Sigma (P - O) \times \alpha(P - O) \,.\, (P - O) \times \mathbf{n}\, d\Sigma\,.$$

L'espressione entro le parentesi quadre vale $5(P-O)\times\alpha(P-O)$; inoltre, nei punti di $\boldsymbol{\Sigma}$, è noto (*O. v.*, pag. 12) che il vettore $\sigma(P-O)$ è parallelo ad $\mathbf{n}$; perciò ne segue:

$$\sigma(P-O).(P-O)\times\mathbf{n}=\mathbf{n}\,;\quad\text{donde}\quad(P-O).(P-O)\times\mathbf{n}=\sigma^{-1}\mathbf{n}\,;$$

quindi, sostituendo,

$$5\int_S(P-O)\times\alpha(P-O)\,dS=-\int_{\Sigma}\sigma^{-1}\mathbf{n}\times\alpha(P-O)\,d\boldsymbol{\Sigma}=$$
$$=-\int_{\Sigma}\mathbf{n}\times\sigma^{-1}\alpha(P-O)\,d\boldsymbol{\Sigma}.$$

L'ultimo membro, in virtù del teorema della divergenza, vale

$$\int_S\operatorname{div}\left[(\sigma^{-1}\alpha)(P-O)\right]dS\,,$$

od ancora (*O. v.*, pag. 57, [10]): $\int_S\mathbf{I}_1(\sigma^{-1}\alpha)\,dS$, cioè $S\cdot\mathbf{I}_1(\sigma^{-1}\alpha)$; e ciò dimostra la (I).

Dalla (I), specializzando opportunamente l'omografia α, si ottengono subito i momenti d'inerzia dell'ellissoide S, rispetto ai suoi piani diametrali principali.

Per dimostrare la (II), poniamo, nella (I), $\mathbf{a}\wedge\alpha$ al posto di α ($\mathbf{a}$ essendo un vettore costante qualunque), e avremo:

$$\int_S(P-O)\times\mathbf{a}\wedge\alpha(P-O)\,dS=S\cdot\mathbf{I}_1(\mathbf{a}\wedge\alpha\sigma^{-1})/5\,,$$

cioè (*O. v.*, pag. 19, [12]):

$$-\mathbf{a}\times\int_S(P-O)\wedge\alpha(P-O)\,dS=-S\cdot\mathbf{a}\times2\mathbf{V}(\alpha\sigma^{-1})/5\,,$$

la quale, per l'arbitrarietà di $\mathbf{a}$, dimostra la (II).