ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Fisica matematica. — *Formule del Green e metodi del Betti nella teoria del moto lento dei liquidi viscosi.* Nota II di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrisp. A. DI LEGGE [1].

Abbiamo veduto nella Nota I che

$$(5)_{bis} \qquad \int_\omega \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\,d\omega = \int_\omega \frac{\partial\left(\frac{u}{r}\right)}{\partial t}\,d\omega = \int_s \frac{u\,u_n}{r}\,dS + \int_\omega \frac{\delta\left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t}\,d\omega\,.$$

Occorre adesso prendere in considerazione l'ultimo integrale del secondo membro. A tal fine premetto un lemma, indicando con $E(\xi, \eta, \zeta, t)$ una funzione, sulla quale intenderemo lecite le operazioni che seguono.

Durante l'intervallo di tempo $\tau_1\,\tau_2$ avremo

$$\int_\omega \frac{\delta E}{\delta t}\,d\omega = \int_{\omega'} \frac{\delta E}{\delta t}\,d\omega' + \int_\sigma \frac{\delta E}{\delta t}\,d\sigma = \frac{\delta}{\delta t}\int_\omega E\,d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega E\,d\omega \text{ [2]}.$$

Ma (indicando con s il contorno di σ) si ha

$$\int_\sigma \frac{\delta E}{\delta t}\,d\sigma = \int_\sigma \frac{\partial E}{\partial t}\,d\sigma - \int_s E\,u_{n'}\,ds = \frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma E\,d\sigma - \int_s E\,u_{n'}\,ds\,.$$

Quindi

$$\int_{\omega'} \frac{\delta E}{\delta t}\,d\omega' + \frac{\partial}{\partial t}\int_\sigma E\,d\sigma - \int_s E\,u_{n'}\,ds = \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega E\,d\omega\,.$$

Da cui

$$\int_{\omega'} \frac{\delta E}{\delta t}\,d\omega' = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\omega'} E\,d\omega' + \int_s E\,u_{n'}\,ds\,.$$

Quest'ultima formula non contiene più elementi relativi all'interno dello spazio fisso σ e può interpretarsi come una formula relativa allo spazio ω', ben inteso sotto certe restrizioni per la E nel campo ω' stesso, sulle quali non è il caso di discutere e che, nell'applicazione che ne faremo noi, risultano implicitamente soddisfatte.

Avremo, dunque, durante l'intervallo di tempo $\tau_1\,\tau_2$ (intervallo indipendente dal raggio h della sfera)

$$\int_{\omega'} \frac{\delta\left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t}\,d\omega' = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\omega'} \frac{u}{r}\,d\omega' + \int_s \frac{u\,u_{n'}}{r}\,ds\,.$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1912.

[2] Evidentemente, $\frac{\delta}{\delta t}\int_\omega$ e $\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega$ hanno lo stesso significato.

e quindi

$$\int_\omega \frac{\delta\left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\omega'} \frac{u}{r} d\omega' + \int_s \frac{u\, u_{n'}}{r} ds + \int_\sigma \frac{\delta\left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\sigma .$$

Ovvero

$$\int_\omega \frac{\delta\left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\omega'} \frac{u}{r} d\omega' + \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t} d\sigma .$$

Talchè, indicando con τ un istante generico dell'intervallo $\tau_1 \tau_2$, avremo, *tenendo presente che il punto (x, y, z) viene riguardato come fisso,*

$$\int_{\tau_1}^{\tau} dt \int_\omega \frac{\delta\left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega = \left\{\int_{\omega'} \frac{u}{r} d\omega'\right\}_\tau - \left\{\int_{\omega'} \frac{u}{r} d\omega'\right\}_{\tau_1} + \int_{\tau_1}^{\tau} dt \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t} d\sigma .$$

Ma

$$\lim_{h=0} \int_{\tau_1}^{\tau} dt \int_\sigma \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t} d\sigma = 0 .$$

Dunque

$$\int_{\tau_1}^{\tau} dt \int_\omega \frac{\delta\left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega = \left\{\int_\omega \frac{u}{r} d\omega\right\}_\tau - \left\{\int_\omega \frac{u}{r} d\omega\right\}_{\tau_1} .$$

Da cui

$$\int_\omega \frac{\delta\left(\frac{u}{r}\right)}{\delta t} d\omega = \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \frac{u}{r} d\omega \quad (^1).$$

Talchè, ritornando alla formula (5_{bis}), avremo

$$\int_\omega \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t} d\omega = \int_s \frac{u\, u_n}{r} dS + \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \frac{u}{r} d\omega .$$

Analogamente avremmo

$$\int_\omega \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial t} d\omega = \int_s \frac{v\, u_n}{r} dS + \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \frac{v}{r} d\omega ,$$

$$\int_\omega \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial t} d\omega = \int_s \frac{w\, u_n}{r} dS + \frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \frac{w}{r} d\omega .$$

Sicchè, sostituendo rispettivamente nelle (3), (4), (5) (ved. Nota I), quindi

(1) La dimostrazione per istabilire questa formula è stata necessaria, per il completo rigore, a motivo della singolarità della $\frac{1}{r}$.

derivando la (3) rispetto ad x, la (4) rispetto ad y e la (5) rispetto a z, e poi sommando, dopo avere osservato che

$$\Delta^2 \int_\omega \frac{p}{r}\, d\omega = -4\pi p(x, y, z, t)$$

e che, richiamando l'incompressibilità,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_\omega \frac{u}{r}\, d\omega + \frac{\partial}{\partial y}\int_\omega \frac{v}{r}\, d\omega + \frac{\partial}{\partial z}\int_\omega \frac{w}{r}\, d\omega\right\} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_\omega \left\{u \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} + v \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta} + w \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}\right\} d\omega =$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\int_s (u \cos nx + v \cos ny + w \cos nz)\frac{dS}{r},$$

avremo appunto la formula (2).

Ora, osservando che

$$\int_s p\left\{\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi}\cos nx + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \eta}\cos ny + \frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \zeta}\cos nz\right\} dS =$$

$$= \int_s p \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, dS,$$

avremo che la (2) può anche scriversi

$$4\pi p - \int_s p \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, dS = G, \tag{6}$$

dove nella G, oltre naturalmente a ϱ e μ e, sotto segni di integrali, alle forze di massa ed a funzioni ben note della teoria del potenziale, figureranno soltanto, sotto segni di integrali, le u, v, w sul contorno e le $\frac{du}{dn}$, $\frac{dv}{dn}$, $\frac{dw}{dn}$. Ciò premesso, osservando che, col tendere del punto (x, y, z) ad un punto del contorno, l'integrale che figura nel primo membro della (6) tende verso il

$$\lim \int_s p \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn}\, dS = 2\pi p_s + \int_s p \frac{d\left(\frac{1}{r_s}\right)}{dn}\, dS$$

(dove l'indice S sta ad indicare che siamo sul contorno S) avremo

$$(7) \qquad 2\pi p_s - \int_s p \frac{d\left(\frac{1}{r_s}\right)}{dn} dS = G_s .$$

Ciò viene a dirci che, nel nostro caso, *e per il nostro scopo*, la p_s può considerarsi come soluzione di una equazione integrale di tipo ben noto. E poichè (in virtù di quanto ci dice la teoria di detta equazione integrale) [1] l'equazione

$$(8) \qquad 2\pi \Phi_s - \int_s \Phi \frac{d\left(\frac{1}{r_s}\right)}{dn} dS = 0$$

ammette l'unica soluzione data da una funzione arbitraria del solo tempo, ne risulta che noi potremo intendere che la (7) ci porga la p_s sotto la forma che noi volevamo.

Ora, sostituendo nella (2) al posto di p_s la espressione in discorso, avremo, nell'interno dello spazio ω, la p sotto la forma voluta (a meno di una funzione del solo tempo). Forma, però, che non appartiene più a quella del Green e che, essendo $G_s = \lim G$, chiarisce il significato dell'espressione « *sotto segni d'integrali* » contenuta nella seconda pagina della Nota I, segni di integrali fra cui, come si vede, resultano compresi anche quelli situati appresso il suddetto segno di limite [2].

Fisica. — *Su di un nuovo tipo di rivelatore di onde elettromagnetiche fondato sull'emissione elettronica dei fili incandescenti.* Nota di QUIRINO MAJORANA, presentata dal Socio P. BLASERNA [3].

In una Nota riportata nel precedente Rendiconto di questa Accademia, ho esposto considerazioni ed esperienze, dalle quali facilmente si deduce quale possa essere la teoria dei due rivelatori, fondati sull'emissione elettronica dei filamenti incandescenti, e chiamati, rispettivamente, *valvola* ed *audion*. In questa Nota voglio dire di un terzo tipo di rivelatore che, essendo fondato sull'utilizzazione dello stesso fenomeno fisico, è stato da me rea-

(1) Vedasi Lauricella, Nuovo Cimento, serie V, tomo XIII (1907), pag. 244. Inoltre (vedasi pure Lauricella, loc. cit., pag. 246) indicando con H la soluzione dell'equazione coniugata della (8), sarà necessariamente $\int_s HG_s \, dS = 0$.

(2) Cfr. Rend. Cl. sc. fis. mat. e nat. Vol. XXI, fasc. IV, 2° sem.

(3) Pervenuta all'Accademia il 15 agosto 1912.