# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

# RENDICONTI

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

**VOLUME XXI.**

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

esse si suppongono dovuti, richiede dunque che l'orbita dell'elettrone abbia un raggio nè troppo piccolo nè troppo grande, e quindi che la velocità del satellite abbia un valore compreso entro certi limiti.

Ora è chiaro, che a seconda delle condizioni in cui avviene la scarica, il valore medio della velocità degli elettroni sarà diverso, e diverso quindi il numero di quelli, la cui velocità è compresa entro i limiti suddetti, i quali evidentemente dipendono dalla natura dell'ione e in particolare dalle dimensioni sue. Perciò la probabilità di formazione dei sistemi planetari ione-elettrone e la loro stabilità e durata, nonchè l'influenza su di questi spiegata da un campo magnetico, potranno variare assai al mutare del gas. Se, per esempio, in un caso estremo accade che, in grazia del valore della velocità della maggior parte degli elettroni, nei sistemi ione-elettrone la distanza fra i due elementi non è abbastanza grande rispetto alla grandezza degl'ioni, detti sistemi nella maggioranza loro cesseranno d'esistere non per separazione, ma per formazione d'atomi neutri. In tal caso evidentemente mancheranno o saranno scarsi di numero gl'ioni positivi abbandonati per via dai raggi magnetici, e più non si formerà in modo sensibile l'anodo virtuale.

In conclusione, il risultato negativo di qualcuna delle esperienze dei due fisici citati non giustifica la supposizione, che la mia ipotesi sia per sua natura inetta a darne in un avvenire forse prossimo una soddisfacente e completa spiegazione. Aggiungo poi, che l'influenza della natura dal gas sui raggi magnetici, da essi messa in evidenza, e che coll'usuale spiegazione di quei fenomeni non si potrebbe affatto comprendere, basterebbe da sola a dimostrare l'insufficienza della spiegazione stessa, e a ribadire così l'opportunità della teoria da me sostenuta.

## Matematica. — *Sopra una proprietà caratteristica delle funzioni armoniche.* Nota di G. Vitali [1], presentata dal Corrispondente O. Tedone.

### I.

1. Il prof. E. E. Levi, in una Nota avente lo stesso titolo di questa [2], ha dimostrato che *una funzione delle due variabili reali $x$, $y$ è armonica in un campo C, se è limitata, integrabile linearmente su ogni circonferenza e superficialmente in C, e se la media dei suoi valori, sopra qualsiasi circonferenza che cada completamente in C, è uguale al valore che essa assume nel centro della circonferenza medesima.*

[1] Pervenuta all'Accademia il 3 settembre 1912.

[2] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 1, 1909, pagg. 10 e sg.

Più tardi il prof. L. Tonelli, in una Nota dello stesso titolo [1], ha riconosciuto che l'armonicità di una funzione consegue anche da condizioni meno restrittive di quelle imposte dal prof. E. E. Levi, e precisamente ha dimostrato che *una funzione delle due variabili reali* $x, y$ *è armonica in un campo* C, *se è integrabile superficialmente in* C, *e se la media dei suoi valori sopra ogni circonferenza che cada completamente in* C, *e su cui sia linearmente integrabile, è uguale al valore che essa assume nel centro della circonferenza medesima.*

Io mi propongo di restringere ancora tali condizioni, e precisamente di dimostrare che *se una funzione* $u(x, y)$ *delle due variabili reali* $x, y$ *è integrabile superficialmente in* C, *ed ha sopra ciascuna coppia di circonferenze concentriche, cadenti completamente in* C *e su cui sia linearmente integrabile, la stessa media di valori, la funzione* $v(x, y)$, *che in ogni punto di* C *assume per valore la media dei valori della* $u(x, y)$, *su qualunque circonferenza avente centro in quel punto — e su cui la* $u(x, y)$ *sia linearmente integrabile —, è una funzione armonica, e non può differire da* $u(x, y)$ *se non in un gruppo di punti di misura nulla.* Siccome poi dalle condizioni imposte in questo teorema alla $u(x, y)$ risulta (per le stesse considerazioni svolte dal prof. E. E. Levi in principio del n. 1 della Nota citata) che la $u(x, y)$, sulle aree di ciascuna coppia di cerchi concentrici e cadenti completamente in C, ha la stessa media di valori, basterà evidentemente dimostrare che *se una funzione* $u(x, y)$ *delle due variabili reali* $x, y$ *è integrabile superficialmente in* C, *ed ha sulle aree di ciascuna coppia di cerchi concentrici e cadenti completamente in* C *la stessa media di valori, la funzione* $v(x, y)$, *che in ogni punto di* C *assume per valore la media dei valori di* $u(x, y)$ *sull'area di qualunque cerchio avente centro in quel punto e cadente completamente in* C, *è una funzione armonica, e da* $u(x, y)$ *non può differire se non in un gruppo di punti di misura nulla.*

2. Supponiamo che $u(x, y)$ sia una funzione delle due variabili reali $x, y$, integrabile superficialmente in C, ed avente, sulle aree di ciascuna coppia di cerchi concentrici e cadenti completamente in C, la stessa media di valori, e che $v(x, y)$ sia la funzione che in ogni punto di C assume per valore la media dei valori di $u(x, y)$ sull'area di qualunque cerchio avente centro in quel punto e cadente completamente in C. Avremo:

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{G(x, y; r)} u(x', y')\, dx'\, dy',$$

[1] Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 11, 1909, pagg. 577 e sg.

dove $G(x, y; r)$ indica un cerchio di centro in $x, y$, cadente completamente in C, ed $r$ il suo raggio; ed avremo anche:

$$v(x, y) = \lim_{r=0} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{G(x, y; r)} u(x', y')\, dx'\, dy'.$$

Ora considerando, secondo i concetti introdotti dal sig. Lebesgue in una Nota recente (1) l'integrale di $u(x, y)$ come funzione di insieme (2), e ricordando che una tale funzione ammette derivata (3) in tutto il campo escluso al più un gruppo di punti di misura nulla e che tale derivata coincide con $u(x, y)$ fuorchè in un gruppo di punti di misura nulla (4) risulta subito che $v(x, y)$ non può differire da $u(x, y)$ che in un gruppo di punti di misura nulla, poichè $v(x, y)$ coincide colla derivata là ove questa esiste (5).

3. Dai risultati precedenti consegue che

$$v(x, y) = \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{G(x, y; r)} v(x', y')\, dx'\, dy',$$

e da questa relazione, ripetendo le considerazioni svolte dal prof. E. E. Levi al n. 1 della Nota citata, colle semplici osservazioni del prof. Tonelli, consegue subito che la $v(x, y)$ è armonica. Così è dimostrato quanto si voleva.

## II.

1. Il prof. V. Volterra (6) ha dimostrato che *una funzione* $u(x, y)$ *continua delle due variabili reali* $x, y$ *è armonica in un campo* C *in cui valga il teorema di esistenza delle funzioni armoniche, se* $u(x, y)$ *assume in ogni punto un valore uguale alla media dei valori che essa assume sopra una sola circonferenza con centro in quel punto, purchè, considerando tale circonferenza come corrispondente a quel punto, ogni punto di* C *risulti connesso al contorno* (7).

(1) *Sur l'integration des fonctions discontinues.* Annales de l'ecole Normale Sup. Paris, 1910, tom. 27, serie 3ª, pagg. 361 e sg.

(2) v. Lebesgue, loc. cit., pagg. 380 e sg.

(3) v. Lebesgue, loc. cit., pagg. 387, 395.

(4) v. Lebesgue, loc. cit., pagg. 487-488.

(5) Per questo basta osservare che una famiglia di cerchi è una famiglia di campi regolari secondo Lebesgue.

(6) v. Volterra, *Alcune osservazioni sopra proprietà atte a individuare una funzione.* Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, vol. XVIII, serie 5ª, 1° sem., fasc. 6, 1909, pagg. 263 e sg.

(7) v. Volterra, loc. cit., n. 4.

Io mi propongo di dimostrare che quest'ultima condizione è superflua: e, per dare maggior portata alle mie considerazioni, comincierò col dimostrare il teorema I della Nota citata del Volterra, sostituendo alla connessione al contorno una condizione meno restrittiva.

2. *Semi-connessione.* Premessi tutti i concetti espressi nei nn. 1, 2, 3, 4 della Nota del Volterra, e indicata con $\delta(A)$ la minima distanza di un punto A dai punti del contorno di C, io dirò che *i punti interni di* C *sono semi-connessi al contorno* se per ogni punto A interno di C è possibile trovare un sèguito di punti connessi (1)

$$A\,, A'\,, A''\,, A''';\ldots$$

di cui faccia parte un punto $A^{(\nu)}$ per cui sia

$$\delta(A^{(\nu)}) < \delta(A)\,.$$

3. Io passo a dimostrare che *una funzione* $u(x\,,y)$ *finita e continua in* C *è determinata quando*

1°) *in un punto* A *interno al campo si conosce*

$$\frac{1}{M(A)}\,P[u\,,M(A)] - u(A)$$

2°) *si conoscono i valori di* $U$ *al contorno di* C.

3°) *tutti i punti interni a* C *sono semi-connessi al contorno* (2).

Per dimostrare questo teorema basta dimostrare che se $u$ è nulla al contorno e se per tutti i punti interni si ha:

$$\frac{1}{M(A)}\,P[u\,,M(a)] - u(A) = 0$$

$u$ è nulla interamente in C.

Ora se $u$ non fosse nullo internamente a C, dovrebbe aver un massimo o un minimo diverso da zero. Supponiamo che tale sia p. es. il massimo e indichiamolo con G. Sia K il gruppo dei punti di C in cui è $u = G$ e $\lambda$ il limite inferiore delle minime distanze dei punti di K dal contorno di C. Se fosse $\lambda = 0$ sarebbe facile vedere, per la continuità di $u$, che $G = 0$ e ciò contro l'ipotesi. Supponiamo dunque $\lambda > 0$. Poichè K è un gruppo evidentemente chiuso esiste un punto A di K per cui $\delta(A) = \lambda$. Ma per ipotesi esiste una successione

$$A\,, A'\,, A''\,A'''\ldots\ldots$$

(1) v. Volterra, loc. cit., n. 4.

(2) Ved. il teorema I n. 5 della Nota del Volterra.

di cui fa parte un punto $A^{(\nu)}$ per cui è

$$\delta(A^{(\nu)}) < \lambda ;$$

e poichè evidentemente in tutti i punti $A' A'' A''' \ldots\ldots$ è $u = G$ (¹); anche in $A^{(\nu)}$ sarebbe $u = G$, ed $A^{(\nu)}$ sarebbe un punto di K, mentre $\delta(A^{(\nu)}) < \lambda$.

Consegue che non può essere $\lambda \neq 0$, ed infine che il teorema è vero.

4. Dal precedente teorema generale consegue subito quanto io mi sono proposto in principio del n. 1 di questo capitolo, ossia che *una funzione* $u(x, y)$ *continua delle due variabili reali* $x, y$ *è armonica in un campo* C *in cui valga il teorema di esistenza delle funzioni armoniche, se* $u(x, y)$ *assume in ogni punto un valore uguale alla media dei valori che essa assume sopra una sola circonferenza con centro in quel punto.*

Ed invero, la circonferenza aggregata ad un punto qualsiasi A interno a C ha certamente qualche punto A' per cui

$$\delta(A') < \delta(A).$$

5. Il prof. Tonelli al n. 2 della Nota citata, si propone di dimostrare che *una funzione* $u(x, y)$ *continua delle due variabili reali* $x, y$ *è armonica nel campo* C *in cui valga il teorema di esistenza delle funzioni armoniche, se* $u(x, y)$ *assume in ogni punto di un gruppo* J *di punti dappertutto denso in* C, *un valore uguale alla media dei valori che essa assume sopra una sola circonferenza con centro nel punto, purchè in ciascun punto di* C *non appartenente ad* J *il limite inferiore dei raggi delle circonferenze relative ai punti di* J, *sia maggiore di zero, ed i punti di* J *siano connessi al contorno.*

La dimostrazione che ne dava il Tonelli non era finora completa, perchè si limitava a dimostrare che per ogni punto A di C esiste un cerchio con centro in A sulla cui circonferenza la media dei valori di $u$ è uguale al valore che $u$ assume in A, mentre che, per dedurre dai risultati del Volterra la conclusione voluta, sarebbe stato necessario provare anche la connessione col contorno di ciascun punto di C, e non so se questo sarebbe stato possibile. Però in seguito ai risultati qui da me ottenuti noi possiamo affermare che il teorema di Tonelli è vero, e che anzi esso è vero anche se si toglie l'ipotesi che ogni punto di J sia connesso al contorno.

**NOTA.** — Nel lavoro di Lebesgue (²) che ho avuto occasione di citare, e i cui risultati sono stati di così grande efficacia nello studio che ho fatto nel cap. 1, e che nella sua prima parte è una geniale estenzione di alcuni

(¹) v. Volterra, loc. cit., dimostrazione del teorema I n. 5.
(²) v. Lebesgue, loc. cit., pag. 362. Nota (2).

miei risultati (¹), l'autore dice che io ho commesso una inavvertenza ritenendo che il teorema del cap. I della mia Nota, nel caso delle due variabili, valga per rettangoli qualunque, il che sarebbe falso.

È vero che effettivamente il mio teorema non ha questa generalità, ma io stesso l'ho avvertito nella Nota facendo seguire all'enunciato queste precise parole:

*Questo teorema ha il suo analogo negli spazî a due o più dimensioni, nel piano p. es. si potrebbe sostituire la considerazione dei segmenti con quellla dei* **quadrati** *aventi i lati paralleli agli assi coordinati* (²).

## Meccanica. — *Sul problema Alfa della dinamica.* Nota dell'ing. Giovanni Giorgi, presentata dal Corrisp. A. Di Legge (³).

1. — Rendo qui brevemente noti, per la prima volta, pubblicamente, i risultati di un'investigazione, sulla quale ho già tenuto una comunicazione verbale preliminare al Congresso della Società italiana di Fisica, del 1906, in Roma, e indi nuovamente altre comunicazioni, seguite da discussioni, alle sedute della Sezione di Roma della stessa Società, nell'anno 1910, e che successivamente ho estesi e completati. La ricerca mi aveva già preoccupato da lungo tempo, ed ero in possesso dei risultati fondamentali fin dal 1903, epoca in cui li feci conoscere a varî cultori della materia in Italia. Devo però una giustificazione al mio ritardo nel pubblicare. Si tratta dei fondamenti della meccanica, e di un argomento che ha fatto oggetto di secolari discussioni, e ha dato luogo alle manifestazioni di opinioni le più svariate da parte dei fisici matematici, dai tempi di Newton ai giorni nostri. Sarebbe stato temerità portare il contributo di un nuovo lavoro, se questo avesse dovuto rappresentare una nuova opinione, anzichè una risposta fondata su ragioni positive. Ho quindi ritenuto necessario uno studio sufficientemente lungo e diligente su tutti gli argomenti che potevano essere addotti, da varî punti di vista, in favore o contro le deduzioni che svolgevo; studio che ha richiesto il provocare ripetute critiche e discussioni. Mi sia qui permesso di esprimere i più vivi sentimenti di riconoscenza a tutti coloro che coi loro consigli e incoraggiamenti, e con le loro critiche, mi sono stati del più valido e autorevole aiuto in questa revisione; particolarmente il prof. Volterra, il prof. Levi-Civita che con lungo interessamento ha esaminato punto per punto la questione, il compianto prof. Vailati, il prof. Marcolongo, il prof. Castel-

(¹) *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.* Atti della R. Ac. delle Scienze di Torino, vol. XLIII, 1907-08.

(²) Vitali, loc., cit., pag. 4.

(³) Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1912.