# ATTI

DELLA

# REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

---

SERIE QUINTA

---

## RENDICONTI

---

**Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.**

---

**VOLUME XXI.**

2° Semestre.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

miei risultati [1], l'autore dice che io ho commesso una inavvertenza ritenendo che il teorema del cap. I della mia Nota, nel caso delle due variabili, valga per rettangoli qualunque, il che sarebbe falso.

È vero che effettivamente il mio teorema non ha questa generalità, ma io stesso l'ho avvertito nella Nota facendo seguire all'enunciato queste precise parole:

*Questo teorema ha il suo analogo negli spazî a due o più dimensioni, nel piano p. es. si potrebbe sostituire la considerazione dei segmenti con quellla dei* **quadrati** *aventi i lati paralleli agli assi coordinati* [2].

## Meccanica. — *Sul problema Alfa della dinamica.* Nota dell'ing. Giovanni Giorgi, presentata dal Corrisp. A. Di Legge [3].

1. — Rendo qui brevemente noti, per la prima volta, pubblicamente, i risultati di un'investigazione, sulla quale ho già tenuto una comunicazione verbale preliminare al Congresso della Società italiana di Fisica, del 1906, in Roma, e indi nuovamente altre comunicazioni, seguite da discussioni, alle sedute della Sezione di Roma della stessa Società, nell'anno 1910, e che successivamente ho estesi e completati. La ricerca mi aveva già preoccupato da lungo tempo, ed ero in possesso dei risultati fondamentali fin dal 1903, epoca in cui li feci conoscere a varî cultori della materia in Italia. Devo però una giustificazione al mio ritardo nel pubblicare. Si tratta dei fondamenti della meccanica, e di un argomento che ha fatto oggetto di secolari discussioni, e ha dato luogo alle manifestazioni di opinioni le più svariate da parte dei fisici matematici, dai tempi di Newton ai giorni nostri. Sarebbe stato temerità portare il contributo di un nuovo lavoro, se questo avesse dovuto rappresentare una nuova opinione, anzichè una risposta fondata su ragioni positive. Ho quindi ritenuto necessario uno studio sufficientemente lungo e diligente su tutti gli argomenti che potevano essere addotti, da varî punti di vista, in favore o contro le deduzioni che svolgevo; studio che ha richiesto il provocare ripetute critiche e discussioni. Mi sia qui permesso di esprimere i più vivi sentimenti di riconoscenza a tutti coloro che coi loro consigli e incoraggiamenti, e con le loro critiche, mi sono stati del più valido e autorevole aiuto in questa revisione; particolarmente il prof. Volterra, il prof. Levi-Civita che con lungo interessamento ha esaminato punto per punto la questione, il compianto prof. Vailati, il prof. Marcolongo, il prof. Castel-

[1] *Sui gruppi di punti e sulle funzioni di variabili reali.* Atti della R. Ac. delle Scienze di Torino, vol. XLIII, 1907-08.

[2] Vitali, loc., cit., pag. 4.

[3] Pervenuta all'Accademia il 20 agosto 1912.

nuovo, il prof. Maggi, il dott. Crudeli, e molti altri che limiti di spazio mi vietano di ricordare singolarmente.

Questa Nota è preliminare e riassuntiva delle conclusioni. La ricerca in forma completa, con lo sviluppo delle dimostrazioni, si troverà esposta in una Memoria nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, che ora è in corso di stampa.

**2.** — Anzitutto espongo i termini della questione, che è quella del riferimento assoluto nelle leggi fondamentali della dinamica. Sono note le difficoltà originate dal fatto che le diverse espressioni conosciute della legge di inerzia, — o, più in generale, le varie equazioni che, nella forma classica, o in quella di Hertz, o in quella di Mach e Maggi, o in qualunque altra equivalente, esprimono i postulati sperimentali dinamici, — non valgono indifferentemente per assi dotati di moto qualunque; ma presuppongono la scelta di sistemi di riferimento particolari (assi assoluti di Newton, sistemi Alfa di C. Neumann, triedri privilegiati di Duhem, etc.), che è permesso soltanto alterare passando a nuovi assi in traslazione uniforme rispetto ai primi. Si è cercato fisicamente in molte guise (da Newton, da Eulero, da Clarke, da Neumann, da Budde, da Volkmann, da Thomson e Tait, da Hertz, da Mach, etc.) di spiegare l'esistenza di questi assi Alfa, di individuarli, di trovare il corpo fisico da cui provengono e che dovrebbe regolare il moto di tutti i corpi conosciuti: sia esso l'etere, o lo spazio dotato di struttura fisica, o l'insieme delle stelle fisse, o l'universo dei corpi materiali. Altre volte (p. es. da Maxwell, da Streintz, da Enriques) si è ammessa questa nozione solo parzialmente: cioè per le rotazioni, non per le traslazioni. Più frequentemente (e così p. es. da Duhem, Muirhead, J. Thomson, Lange, Hadamard, Love, de Tilly, Vailati, etc.) la questione è stata provvisoriamente risoluta ammettendo il riferimento Alfa sotto forma astratta, senza materializzarlo, cioè affermando che in infinite guise, con sistemi inerziali, come girostati, o sistemi di proiettili di Lange, etc., si possono ritrovare sistemi di assi, rispetto a cui le equazioni $X = m \frac{d^2x}{dt^2}$, etc., valgono. Ma sono state tutte soluzioni ipotetiche, perchè nessuno ha dimostrato mai l'impossibilità di ricavare i fatti dinamici da equazioni che siano invarianti rispetto a un moto arbitrario degli assi. Nè ad evitare la questione vale l'accettare col Kirchhoff le equazioni newtoniane siccome « definizioni » delle $X, Y, Z$; perchè allora la meccanica si sviluppa solo astrattamente, e la questione del riferimento risorge quando, passando a determinate applicazioni (di meccanica terrestre), si deve affrontare la postulazione fisica, omessa inizialmente.

Certo è che la postulazione dei triedri privilegiati semplifica tutto e permette di ricavare tutti i fatti sperimentali conosciuti; ma la reciproca non è dimostrata, e non sembra fisicamente verisimile. E ciò è tanto vero, che esiste qualche meccanica, come quella di Reech e Andrade, in cui, partendo dalla postulazione contraria, si ricavano, almeno in un campo limitato di applicazione, gli stessi risultati.

**3.** — La questione può essere risoluta solo in un modo: cercare di tradurre in equazioni di moto relativo tutti i fatti dinamici fondamentali conosciuti (il che deve essere possibile, perchè sono tutti fatti ricavati da esperienze di moto relativo); indi verificare se queste equazioni hanno, o no, forma invariante rispetto a un moto arbitrario degli assi.

Trattiamola anzitutto pel caso ipotetico di un mondo a una dimensione. Siano ivi da principio due soli corpi, di masse $m_1$, $m_2$, soggetti a una *forza mutua* $f_{12}$. Nella meccanica newtoniana, presupponendo l'esistenza di una origine assoluta, scriveremmo le due accelerazioni sotto la forma

$$j_1 = f_{12}/m_1 \quad , \quad j_2 = -f_{12}/m_2 .$$

Per differenza se ne ricava

$$j_{12} = f_{12}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right), \tag{1}$$

dove $j_{12}$ esprime l'accelerazione relativa dei due corpi. Ora questa equazione mette in rapporto le uniche quantità direttamente osservabili, e non contiene più traccia di termini dipendenti dalla scelta e dal moto di un'origine. Dunque, per quel caso particolare, essa risponde al quesito Alfa in modo negativo.

Le conclusioni sembrano però differire quando, sempre in quel mondo a una dimensione, si suppone l'intervento di campi di forza, provenienti da corpi eventualmente sconosciuti, o da forze non tutte mutue, o non tutte date *a priori*. Ma allora si presenta il problema di misurare la « forza totale » che sollecita un corpo. Analizzando questo problema, si trova la risoluzione della difficoltà. Infatti, facilmente si riconosce che la « forza totale » non è quantità fisicamente determinata in modo unico, senza intervento di convenzioni sul riferimento; per misurarla è necessario ricorrere almeno in parte al metodo di Kirchhoff, dicendo che un corpo $m$ è sollecitato, per definizione, da una forza nulla allorquando la sua accelerazione è nulla rispetto a un riferimento convenzionale scelto, ovvero da una forza $mj$ allorquando tale accelerazione si osserva uguale a $j$; e constatando (qui interviene il fatto fisico) che se si aggiunge al corpo una forza addizionale dinamometricamente misurata da $\delta f$, la variazione di $mj$ coincide con $\delta f$. Allora l'unico fatto dinamico da esprimere è quello relativo a questa ultima constatazione; cioè

$$\delta . mj = \delta f \tag{2}$$

e questa unica legge dinamica soddisfa ancora alla condizione dell'invarianza rispetto al moto dell'origine.

La sua forma suggerisce di scrivere ancora la (1) in questa guisa:

$$\frac{\partial j_{12}}{\partial f_{12}} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{3}$$

per renderla valevole nel caso in cui i corpi $m_1$, $m_2$, oltre ad essere sollecitati dalla $f_{12}$, siano immersi in un campo di forza qualunque. E in molte guise si possono trasformare queste equazioni, prendendo come tipici certi, piuttosto che certi altri casi particolari. E si possono scrivere sotto forma finita, o come equazioni a derivate parziali; nella prima forma dicono che « in assenza di altre forze, l'accelerazione dovuta a una certa $f$ ha un certo « valore »; nella seconda, dicono che, « in presenza di altre forze, la *parte* « di accelerazione dovuta a una $f$ ha ancora quel certo valore »; per cui il significato è lo stesso.

**4.** — Per un'investigazione analoga nello spazio a tre dimensioni, i metodi sono due: mi limito ad accennarli, e a mostrare i risultati.

Entrambi riposano su questa indagine statica preliminare. Per mezzo di un filo elastico teso, si può avere un campione di forza, che si suppone conservabile e riproducibile a volontà; un qualunque gruppo di $n$ fili identici al campione e paralleli dà una forza $n$, a cui per direzione si attribuisce quella comune dei fili; e si generalizza facilmente al caso di $n$ reale qualunque. Quando si constati che un sistema di forze applicate simultaneamente a un punto materiale, o remosse da esso, non alterano il suo moto, qualunque questo moto sia, si dice che quelle forze sono in equilibrio. Segue la costruzione, la taratura e l'uso di un dinamometro. Per mezzo di esso si può misurare non già la forza *totale* $\mathbf{F}$ (vettore) che sollecita un corpo immerso in un campo, ma bensì ogni forza *parziale* o addizionale $\delta\mathbf{F}$, dovuta a una qualsiasi azione fisica che sia applicabile e removibile a volontà. La forza totale resta conseguentemente determinata a meno della scelta dello zero, che dipende dal moto di un riferimento arbitrario, e introduce sei funzioni arbitrarie del tempo, comuni a tutti i corpi.

Ciò premesso, il primo metodo è questo: considerare due corpi rigidi estesi, con masse e momenti d'inerzia conosciuti; considerare uno sforzo mutuo elicoidale (forza + coppia) agente fra i due: nell'ipotesi restrittiva che non vi siano altri corpi e forze al mondo, scrivere un sistema di sei equazioni finite. corrispondenti alle (1), e che daranno sei componenti del moto relativo dei due corpi; nell'ipotesi, invece, di un campo qualunque di forze sovrapposto all'azione mutua, scrivere un sistema di sei equazioni a derivate parziali, corsispondenti alle (3), e che daranno quella parte delle sei componenti suddette, che è dovuta all'azione mutua. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per una dimensione, si accerta che queste equazioni esprimono tutto quello che vi è da dire sui fatti dinamici. E anche senza scriverle di fatto, si comprende *a priori* che per la loro struttura risultano indipendenti dai riferimenti. Quindi anche per le tre dimensioni si ricava, al quesito Alfa, una risposta negativa.

L'altro metodo è questo. Assumere un corpo arbitrario (rigido esteso) di riferimento, e fissarvi un triedro $Oxyz$. Considerare un punto materiale di massa $m$. Questo è soggetto a forze, che la meccanica classica descriverebbe così: — $a$) un campo $\mathbf{F}_1$ preesistente, che non sappiamo misurare altro che osservando le accelerazioni; — $b$) il campo delle forze $\mathbf{F}_2$ di Coriolis, dovute al cosiddetto moto assoluto del riferimento; — $c$) le forze arbitrariamente applicabili, $\delta\mathbf{F}$, e che si possono misurare col dinamometro. Dicendo $\mathbf{j}$ il vettore che ha per componenti $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, si avrà che $m\mathbf{j}$ è la forza relativa; cioè, pel teorema di Coriolis, si ha l'equazione (vettoriale)

(4) $$m\mathbf{j} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \delta\mathbf{F}.$$

Ora, il campo $\mathbf{F}_1$ e il campo $\mathbf{F}_2$ sono fisicamente indistinguibili fra loro, e si fondono in un campo solo, $\mathbf{F}_0$, che il Levi-Civita chiama il campo delle « forze inevitabili »; questo campo è misurabile solo osservando l'accelerazione relativa $\mathbf{j}_0$ che esso induce in assenza del $\delta\mathbf{F}$; quindi, in luogo di $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, conviene scrivere $m\mathbf{j}_0$ per mettere in evidenza il solo dato effettivamente desunto dall'osservazione. E allora, in luogo dell'equazione in forma newtoniana (4), che non ha senso determinato, perchè soggetta alla scelta del riferimento, si ha la seguente:

$$m(\mathbf{j} - \mathbf{j}_0) = \delta\mathbf{F},$$

ovvero

(5) $$m\,\delta\mathbf{j} = \delta\mathbf{F}.$$

Questa equazione corrisponde interamente alla (2), e per gli stessi ragionamenti può accettarsi come traduzione completa dei fatti dinamici. A differenza della (2), contiene l'elemento $\mathbf{j}$, che dipende dal moto arbitrario del sistema di riferimento. Ma siccome questo sistema è stato supposto qualunque, dobbiamo concludere che (a differenza di $\mathbf{j}$) la variazione $\delta\mathbf{j}$ è invariante, perchè è invariante il secondo membro (ricavato da misure che non dipendono da riferimenti); cioè è invariante l'equazione; quindi anche essa non conduce a triedri privilegiati.

In forma cartesiana, si può scrivere, p. es.

(6) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial X}\,\dfrac{d^2X}{dt^2} = \dfrac{1}{m} \\ \text{etc.,} \end{cases}$$

e assumere queste equazioni come postulati fondamentali in luogo di quelli classici per ricavare la meccanica tutta indipendente da questioni di moto assoluto.

**5.** — La ricostruzione di questa meccanica si ottiene come segue. È dato il riferimento arbitrario $Oxyz$; è dato il punto materiale di massa $m$; si procede a un'esplorazione preliminare del campo con un dinamometro (attaccato a un terzo corpo che non sia vincolato coi primi due), e si determina lo sforzo dinamometrico $\mathbf{F}$ che conviene applicare al punto $m$ per rendere nulla la sua accelerazione $x'', y'', z''$. Assumendo lo stato così realizzato di accelerazione nulla siccome stato nullo delle forze, la forza nello stato normale s'intenderà misurata da $\mathbf{F}$. Allora, se $\mathbf{j}$ è l'accelerazione in questo stato, i valori $\mathbf{j}, \mathbf{F}$, così definiti, rappresentano variazioni $\delta\mathbf{j}, \delta\mathbf{F}$, fatte a partire da uno stato in cui $\mathbf{j}_0 = 0 = \mathbf{F}_0$ per definizione. E quindi, in virtù del postulato (5), si ha

$$\mathbf{j} = m\mathbf{F}. \tag{7}$$

Cioè, in funzione della $\mathbf{F}$ dinamometricamente misurata, si ha la $\mathbf{j}$ relativa al riferimento arbitario prescelto. L'equazione è identica a quella di Galileo-Newton, e quindi la meccanica che si costruisce a partire da essa è identica a quella classica, con identico contenuto, ma valevole pel riferimento $Oxyz$ in moto arbitrario qualunque.

La presunzione arbitraria, ammessa nella dinamica classica, dipende dall'uso sottinteso di qualche appoggio a corpi assunti come fermi, fatto tacitamente nelle misure ordinarie di forza; per cui poi si ritrovano, come privilegiati, nelle leggi dinamiche, quei riferimenti arbitrarii che per determinare le forze si sono introdotti.

**6.** — Dunque una risposta al quesito Alfa si può dare, ed è negativa. Questa conclusione vale limitatamente all'ambito della meccanica newtoniana ordinaria, e cioè: — *a*) escludendo dinamica elettronica, e termini complementari di Lorentz-Einstein per corpi in moto con velocità grandissime; — *b*) escludendo previe cognizioni fisiche sui campi di forza effettivamente esistenti, e sulla loro proprietà conservative: cognizioni che valgono a distinguere le forze centrifughe-composte di Coriolis; — *c*) escludendo applicazione specifica a gravitazione o ad altri campi di forza singoli. Tutti questi fenomeni dànno bensì luogo ad assi Alfa loro proprî: ma siffatti assi possono risultare diversi da punto a punto e da fenomeno a fenomeno, e non hanno che vedere con gli ipotetici assi Alfa che dovevano intervenire nelle leggi dinamiche e risultare universali.