ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Meccanica. — *Sulle deformazioni elastiche delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro.* Nota di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Corrisp. O. TEDONE [1].

In una mia precedente Nota, pubblicata sotto questo medesimo titolo negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino (adunanza del 12 maggio 1912), ho cercato di analizzare le deformazioni elastiche che si verificano in un tubo di condotta forzata durante ogni operazione di riempimento o di vuotamento della condotta, determinando per via grafica la legge con cui varia, al variare dell'altezza di carico disponibile, una data dimensione lineare della sezione retta generica del tubo, e più precisamente il suo diametro verticale.

Mi propongo qui di trattare sotto un altro punto di vista il medesimo problema, applicando il classico metodo del Betti allo studio delle corrispondenti variazioni dell'area della stessa sezione e conseguentemente del volume del tronco di condotta che si considera [2].

Le considerazioni che sto per esporre possono essere con vantaggio messe in relazione con alcune recenti ricerche del prof. Guidi [3], ricerche alla cui notevole importanza tecnica ho già avuto occasione di accennare nella citata mia Nota.

Supposto il tubo cilindrico a generatrici orizzontali, limiterò il problema a due sole dimensioni prendendo in considerazione la linea chiusa σ traccia della superficie interna del tubo sul piano del disegno (fig. 1) supposto normale alla direzione delle generatrici; sia τ l'area semplicemente connessa che ha quella linea per contorno.

Indicherò genericamente con $\mathbf{p}$ la forza (riferita all'unità di lunghezza) distribuita su σ da considerarsi come una pressione normale rivolta dall'interno verso l'esterno; con $\mathbf{s}$ lo spostamento subìto dal punto generico P di σ in una qualsiasi deformazione elastica del sistema, spostamento che, conformemente alle consuete ipotesi fondamentali della teoria dell'elasticità,

[1] Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1912.

[2] Lo stesso principio venne recentissimamente utilizzato dal prof. Cisotti nello studio di un problema che con questo presenta notevole affinità. Cfr. la Nota: *Sulla deformazione idrostatica degli scafi*, comparsa nel 1° fasc. (2° sem. 1912) di questi stessi Rendiconti.

[3] Guidi, *Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro*, Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino, adunanze del 28 aprile e del 16 giugno 1912.

si suppone qui piccolissimo a fronte delle dimensioni del sistema; accenti eguali serviranno a mettere in evidenza la dipendenza di un dato sistema di spostamenti da un sistema dato di forze.

Supposte nulle o trascurabili le forze di massa, nonchè le pressioni agenti sulla superficie esterna del tubo, il teorema di Betti (¹) ci permette di scrivere la relazione generale

$$\text{(I)} \qquad \int_\sigma \mathbf{p}' \times \mathbf{s}'' d\sigma = \int_\sigma \mathbf{p}'' \times \mathbf{s}' d\sigma .$$

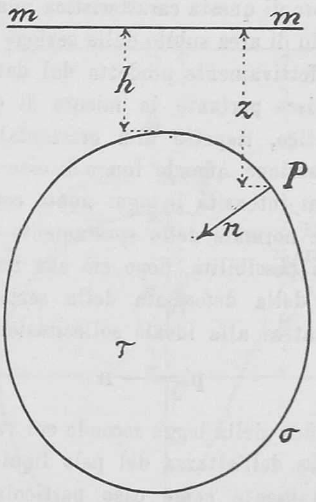

Fig. 1.

Assumeremo per sistema delle pressioni $\mathbf{p}''$ quello che è effettivamente realizzato dal carico idrostatico quando il livello di pelo libero *mm* trovasi ad una data quota generica h (che supporremo sempre positiva) al di sopra della sommità del contorno dato σ.

Detta z l'altezza di carico disponibile in tale ipotesi in un punto qualsiasi P di σ, la pressione unitaria in esso punto applicata (ove si ritenga la densità dell'acqua eguale all'unità) dovrà intendersi rappresentata dal vettore

$$\mathbf{p}'' = -z\mathbf{n} ,$$

essendo $\mathbf{n}$ un vettore unità diretto secondo la normale in P al contorno σ e rivolto verso l'interno.

(¹) Betti, *Teoria dell'elasticità*, Nuovo Cimento, ser. 2ª, tom. VII ed VIII, 1872; cfr. anche Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*, Torino, 1894; ovvero ancora: Burali-Forti e Marcolongo *Omografie vettoriali*, Torino, 1909.

Assumeremo invece il sistema delle pressioni $\mathbf{p}'$ a rappresentare una distribuzione di pressione uniforme e di intensità eguale all'unità, cioè porremo

$$\mathbf{p}' = -\mathbf{n}.$$

La (I) diviene immediatamente

$$\text{(II)} \qquad -\int_\sigma \mathbf{s}'' \times \mathbf{n}\, d\sigma = -\int_\sigma (\mathbf{s}' \times \mathbf{n})\, z\, d\sigma .$$

Ma il primo membro di questa caratteristica relazione altro non rappresenta se non l'incremento di area subìto dalla sezione retta considerata, nella deformazione elastica effettivamente prodotta dal dato carico idrostatico; il secondo membro ci fornisce pertanto la misura di questo incremento sotto forma del momento statico, rispetto alla orizzontale del pelo libero, del contorno bagnato della sezione, quando lungo di esso si immagini distribuita una massa fittizia la cui intensità in ogni punto come P sia misurata dal valore della componente normale dello spostamento $\mathbf{s}'$ corrispondente.

Non insisterò sulla possibilità, dopo ciò che ho detto evidente, di dedurre dalla conoscenza della deformata della sezione (o più precisamente del suo contorno σ) relativa alla ideale sollecitazione uniforme

$$\mathbf{p}' = -\mathbf{n}$$

la rappresentazione grafica della legge secondo cui varia l'area della sezione retta del tubo al variare dell'altezza del pelo liquido libero, anche perchè la cosa rientra completamente come caso particolare in ciò che a questo proposito ho scritto nella citata mia Nota.

Osserverò piuttosto che, dal punto di vista analitico, il secondo membro della (II) può essere utilmente trasformato coll'aiuto del noto lemma di Gauss.

Dal teorema della divergenza, supposto $\mathbf{s}'$ prolungato nell'interno di τ con legge qualunque, si ha infatti

$$-\int_\sigma (\mathbf{s}' \times \mathbf{n})\, z\, d\sigma = \int_\tau \operatorname{div}(z\mathbf{s}')\, d\tau .$$

La (II) si trasforma così nella

$$\text{(III)} \qquad -\int_\sigma \mathbf{s}'' \times \mathbf{n}\, d\sigma = \int_\tau \operatorname{div}(z\mathbf{s}')\, d\tau$$

relazione la quale si presta ad una discussione semplice ed esauriente del caso, praticamente il più interessante, in cui la sezione è circolare con pareti il cui spessore costante e sia sufficientemente piccolo a fronte del raggio r.

Supporrò, come ho fatto del resto già nella Nota precedente, che il tubo sia semplicemente appoggiato su di un suolo piano orizzontale ed incompressibile (fig. 2).

Sotto l'azione della ipotetica pressione uniforme

$$p' = -\mathbf{n}$$

la data circonferenza di raggio r si trasforma in un'altra circonferenza di raggio

$$r(1+\varepsilon) = r\left(1 + \frac{r}{\mathrm{E}e}\right),$$

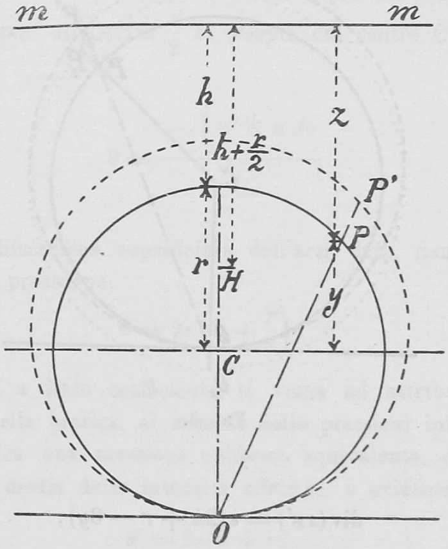

Fig. 2.

essendo E il modulo di elasticità normale del materiale omogeneo di cui la parete si ritiene costituita.

Se pertanto si denota con O la traccia della generatrice d'appoggio, e con P′ la posizione effettivamente assunta, dopo la deformazione testè descritta, da un punto generico P di σ, si ha, in conseguenza delle premesse ipotesi di vincolo [1]

$$s' = P' - P = \varepsilon(P - O)$$

[1] Si prescinda infatti per un momento dai vincoli imposti, e si immagini che la deformazione si verifichi in modo da lasciar immobile il centro C del cerchio dato (fig. 3). Allora ogni punto come P subisce un semplice spostamento radiale di grandezza costante $PP_1 = \varepsilon r$, epperò anche O deve spostarsi secondo la medesima legge. Ma questo sposta-

Noi supporremo che $\mathbf{s}'$, così definito soltanto su σ, venga prolungato nell'interno di τ in modo che, P essendo comunque scelto in τ, sia ancora

$$\mathbf{s}' = \varepsilon(\mathrm{P} - \mathrm{O})$$

Per altra parte, se y indica la distanza, presa col debito segno, del punto generico P dalla orizzontale condotta pel centro C di σ, si ha

$$z = h + r - y,$$

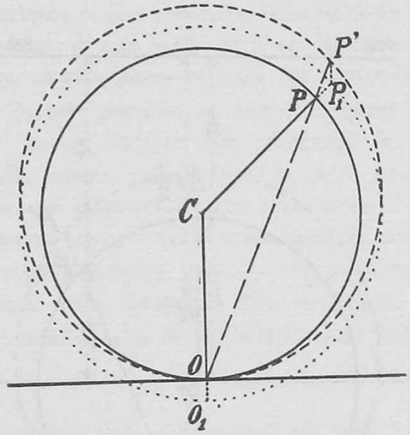

Fig. 3.

epperò

$$\operatorname{div}(z\mathbf{s}') = \varepsilon(2h + r - 3y),$$

onde, sostituendo nella (III),

$$-\int_\sigma \mathbf{s}'' \times \mathbf{n}\, d\sigma = 2\varepsilon\left(h + \frac{r}{2}\right)\int_\tau d\tau - 3\varepsilon\int_\tau y\, d\tau\,.$$

Ma l'ultimo integrale è evidentemente nullo: si ottiene perciò

$$-\int_\sigma \mathbf{s}'' \times \mathbf{n}\, d\sigma = 2\varepsilon\left(h + \frac{r}{2}\right)\int_\tau d\tau = 2\varepsilon\left(h + \frac{r}{2}\right)\pi r^2\,,$$

---

mento di O è incompatibile coi vincoli a cui in realtà il sistema è soggetto. Per ottenere adunque il cerchio deformato nella sua vera posizione bisognerà far subire al luogo dei punti P_1 una traslazione $\mathrm{P}_1\mathrm{P}' = \mathrm{O}_1\mathrm{O} = \varepsilon r$ atta a riportare la traccia della generatrice d'appoggio nella sua primitiva posizione. La somiglianza dei due triangoli OCP, $\mathrm{PP}_1\mathrm{P}'$ basta a render ragione della espressione che si trattava di dimostrare.

ovvero anche, sostituendo ad ε il suo valore noto,

$$\text{(IV)} \qquad -\int_\sigma \mathbf{s}'' \times \mathbf{n}\, d\sigma = 2\,\frac{r}{\mathrm{E}e}\left(h+\frac{r}{2}\right)\pi r^2 .$$

Da questa espressione, atta al calcolo numerico immediato, si rileva agevolmente che la variazione dell'area della data sezione è direttamente proporzionale all'altezza

$$h+\frac{r}{2}$$

della orizzontale *mm* del pelo liquido libero sopra un punto fisso H della sezione stessa situato all'altezza $\frac{r}{2}$ al disopra del centro C.

Detto

$$\theta = \frac{-\int_\sigma \mathbf{s}'' \times \mathbf{n}\, d\sigma}{\int_\tau d\tau}$$

il coefficiente di dilatazione superficiale dell'area data, risulta ovviamente, dalle formole che precedono,

$$\text{(V)} \qquad \theta = 2\varepsilon\left(h+\frac{r}{2}\right).$$

Il valore che, a detto coefficiente, si viene ad attribuire sostituendo, come si usa far nella pratica, al sistema delle pressioni interne distribuite con legge idrostatica una pressione uniforme equivalente, cioè di intensità ovunque pari alla media delle intensità effettive, è evidentemente [1]

$$\theta' = 2\varepsilon(h+r).$$

La differenza

$$\theta' - \theta = \varepsilon r$$

indipendente da h, epperò costante al variare dell'altezza di carico disponibile, può in un certo senso assumersi come la misura di quel caratteristico

(1) Una simile distribuzione uniforme di pressioni trasformerà infatti il dato cerchio di raggio r in un altro cerchio di raggio

$$r\,[1+\varepsilon(h+r)].$$

Si passa ovviamente dall'una all'altra figura mediante una dilatazione piana uniforme, il cui coefficiente di dilatazione lineare è

$$\varepsilon(h+r).$$

Tenuta presente la supposta piccolezza delle deformazioni elastiche, è noto come si possa dimostrare che il coefficiente di dilatazione superficiale deve risultare precisamente eguale al doppio del precedente.

fenomeno di ovalizzazione del tubo, la cui importanza è stata così opportunamente messa in luce dai lavori del prof. Guidi.

In virtù di questo fenomeno la dilatazione superficiale della data sezione, appena la condotta è piena ma non ancora sotto carico (cioè per $h=0$), è eguale alla metà soltanto della dilatazione superficiale a cui darebbe luogo la equivalente ripartizione uniforme delle pressioni.

L'entità *relativa* dell'errore a cui conduce la sostituzione della effettiva distribuzione idrostatica delle pressioni con una equivalente distribuzione uniforme, decresce però indefinitamente al crescere indefinito di h. La (V) viene così a precisare il senso in cui va intesa l'attitudine delle pressioni stesse dell'acqua a contrastare, quando la condotta è a pieno carico, il sopra accennato fenomeno di ovalizzazione dei tubi.

Fisica matematica. — *Formule del Green e metodi del Betti nella teoria del moto lento dei liquidi viscosi.* Nota III di Umberto Crudeli, presentata dal Corrisp. A. Di Legge (¹).

III. Si consideri l'equazione

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu \Delta^2 u = X - \frac{\partial p}{\partial \xi},$$

dove (in virtù di quanto abbiamo trovato nelle Note precedenti) potremo intendere posto il secondo membro sotto la forma (lo indicheremo allora con L) che desideravamo. E si ponga

$$F = \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \qquad (t_0 \leq \tau < t).$$

Adesso le ξ, η, ζ rappresentano le coordinate di un punto generico della porzione di fluido considerata all'istante τ; le x, y, z rappresentano le coordinate di un punto *interno* della porzione stessa, all'istante t. La F, come è ben noto nella teoria della propagazione del calore, è una soluzione dell'equazione

$$\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \mu \Delta^2 \psi = 0.$$

Sicchè, per $t_0 \leq \tau < t$, avremo

$$\varrho \int_{\omega_\tau} \frac{\partial (uF)}{\partial \tau} d\omega_\tau = \mu \int_{\omega_\tau} (F\Delta^2 u - u\Delta^2 F)\, d\omega_\tau + \int_{\omega_\tau} LF d\omega_\tau,$$

(¹) Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1912.