ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sull'equazione alle potenze.* Nota del dottore L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge [1].

Un notevole studio del prof. M. Bottasso [2] mi ha richiamato in mente alcune idee, che, pur avendo le apparenze di ordinarie esercitazioni d'algebra, contengono tuttavia il germe di nuovi e felici svolgimenti.

Sia

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0 \tag{1}$$

un'equazione algebrica, ed i numeri $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano le radici di questa equazione. Consideriamo ancora il seguente polinomio

$$\varphi(y) = b_0 y^m + b_1 y^{m-1} + \cdots + b_{m-1} y + b_m, \tag{2}$$

e chiamiamo $y_1, y_2, \ldots y_m$ le radici dell'equazione in y

$$\varphi(y) = x. \tag{3}$$

Queste radici saranno funzioni algebriche della variabile x, considerata indipendente da y.

Formiamo ora la seguente funzione di x:

$$F(x) = f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_m). \tag{4}$$

Essa è evidentemente una funzione razionale intera simmetrica delle radici $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dell'equazione (3); dunque è una funzione razionale intera in x. È facile determinarne le radici.

Affinchè $F(x)$ si annulli, è necessario e sufficiente che si annulli qualcuno dei termini $f(y_1), f(y_2), \ldots, f(y_m)$ del prodotto che figura nella formula (4). Si richiede quindi ed è sufficiente che sia

$$y_\mu = x_\nu, \tag{5}$$

dove μ e ν rappresentano genericamente, senza obbligo di diversità, due numeri delle rispettive serie $1, 2, 3, \ldots, m$; $1, 2, \ldots, n$.

Dalla (5) si deduce $\varphi(y_\mu) = \varphi(x_\nu)$; e allora, per intervento della (3), possiamo scrivere

$$x = \varphi(x_\nu). \tag{6}$$

È dunque necessario e sufficiente che x verifichi la (6) affinchè $F(x)$ si

[1] Pervenuta all'Accademia il 28 giugno 1912.

[2] *Sull'equazione alle potenze di un'equazione secolare* ecc. Atti del R. Istituto Veneto, t. LXXI, parte 2ª (1912).

annulli; ciò vale come dire che le radici di $F(x)$ sono $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$. Il prodotto $a_0^n y_1^n y_2^n \dots y_m^n$, che vale $\left(\frac{a_0}{b_0}\right)^n (b_m - x)^n$, darà evidentemente il termine di grado più alto in x che possa figurare in $F(x)$; dunque il polinomio $F(x)$ risulta di grado n in x. Non occupandoci in modo speciale del caso di radici multiple dell'equazione $f(x) = 0$ (e ce ne dà diritto una considerazione molto frequente e molto semplice) noi veniamo senz'altro a stabilire che l'equazione

$$F(x) = 0 \tag{7}$$

rappresenta una *trasformata di Tschirnhausen* dell'equazione (1); le sue radici $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ sono legate colle $x_1, x_2, \dots, x_n$ dalla relazione generica

$$\xi_\nu = \varphi(x_\nu). \tag{8}$$

Nel caso particolare $\varphi(y) = y^m$, noi otteniamo la cosiddetta *equazione alle potenze* relativa all'equazione data.

Per riferirci al lavoro del prof. Bottasso, consideriamo l'equazione

$$f(x) = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - x \end{vmatrix} = 0, \tag{9}$$

senza menomamente ammettere la simmetria, cioè il generico vincolo $a_{rs} = a_{sr}$. Scriviamo a norma della formula (4), il relativo polinomio $F(x)$. Chiamando ϱ un valore di $\sqrt[m]{x}$, noi possiamo rappresentare $F(x)$ con $f(\varrho) f(\varrho\varepsilon) f(\varrho\varepsilon^2) \dots f(\varrho\varepsilon^{m-1})$, purchè ε rappresenti una radice primitiva m^{ma} dell'unità. Le funzioni simmetriche (razionali intere) di $\varrho, \varrho\varepsilon, \dots, \varrho\varepsilon^{m-1}$ conducono ai coefficienti dell'equazione $y^m - x = 0$, cioè a zero o ad x, il che facilita molto l'esecuzione del prodotto in questione; ma alcune considerazioni teoriche sulla composizione delle matrici ci lasciano pervenire ad una rapida e semplice formazione del polinomio $F(x)$.

Consideriamo la sostituzione lineare

$$T = \left| \begin{array}{l} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n \\ \dots \\ x_n' = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n \end{array} \right.$$

ponendoci nell'ipotesi che il determinante differisca da zero. La T trasforma le coordinate (non omogenee) di un punto $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ nelle coordinate (non omogenee) di un punto $P' = (x_1', x_2', \dots, x_n')$. Se vogliamo che P e P' siano allineati coll'origine, bisognerà che sia $x_1' = \lambda x_1$, $x_2' = \lambda x_2, \dots$, $x_n' = \lambda x_n$, dove λ dev'essere una radice dell'equazione (9); ed, in quella

direzione invariante, le lunghezze OP subiranno l'allungamento unitario λ. Evidentemente l'applicazione della T^m conduce alle medesime direzioni invarianti, e l'allungamento sarà λ^m. Ciò prova che eseguendo (in modo opportuno) il prodotto di m determinanti $\Sigma \pm a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\nu}$, si ottiene un determinante $\Sigma \pm k_{1\alpha} k_{2\beta} \dots k_{n\nu}$, tale che l'equazione

$$(10) \qquad F(x) = \begin{vmatrix} k_{11} - x & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} - x & \dots & k_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} - x \end{vmatrix} = 0$$

ha come radici le potenze m^{me} delle radici dell'equazione (9).

Per esempio, dal determinante

$$(11) \qquad f(x) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix}$$

si giunge (volendo l'equazione alle terze potenze) al determinante

$$(12) \qquad F(x) = \begin{vmatrix} -6-x & -7 \\ 14 & 15-x \end{vmatrix}.$$

Il determinante (11) ha le radici 1 ; 2 ; il determinante (12) ha per radici le terze potenze 1 ; 8.

Nel caso del determinante nullo, la regola non varia; il che si vede subito, se si considerano i due determinanti (9) e (10) come funzioni razionali intere delle n^2 variabili a_{rs}.

Parrebbe, dal nostro ragionamento, che la potenza m^{ma} del determinante $\Sigma \pm - a_{1\alpha} a_{2\beta} \dots a_{n\nu}$ dovesse eseguirsi in un modo speciale; ma l'osservazione ben elementare che T e la trasposta hanno le stesse direzioni invarianti ci svincola da questa pretesa precauzione.

Riferendoci al prodotto degli m determinanti $f(\varrho), f(\varrho\varepsilon), \dots, f(\varrho\varepsilon^{m-1})$, noi vediamo che le radici $\varrho, \varrho\varepsilon, \dots, \varrho\varepsilon^{m-1}$ dell'equazione $y^m = x$ lasciano traccia soltanto nella combinazione x, che, a meno del segno, ne rappresenta il prodotto. Ciò risulta chiaro dalla teoria delle funzioni simmetriche; ma non era evidente *a priori* che dai singoli termini del determinante prodotto si potessero fare sparire le eventuali combinazioni non simmetriche. Insistiamo su questo concetto, perchè, per esempio, a proposito del determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix},$$

le cose avvengono in modo alquanto diverso.