ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

fenomeno di ovalizzazione del tubo, la cui importanza è stata così opportunamente messa in luce dai lavori del prof. Guidi.

In virtù di questo fenomeno la dilatazione superficiale della data sezione, appena la condotta è piena ma non ancora sotto carico (cioè per $h=0$), è eguale alla metà soltanto della dilatazione superficiale a cui darebbe luogo la equivalente ripartizione uniforme delle pressioni.

L'entità *relativa* dell'errore a cui conduce la sostituzione della effettiva distribuzione idrostatica delle pressioni con una equivalente distribuzione uniforme, decresce però indefinitamente al crescere indefinito di h. La (V) viene così a precisare il senso in cui va intesa l'attitudine delle pressioni stesse dell'acqua a contrastare, quando la condotta è a pieno carico, il sopra accennato fenomeno di ovalizzazione dei tubi.

Fisica matematica. — *Formule del Green e metodi del Betti nella teoria del moto lento dei liquidi viscosi.* Nota III di UMBERTO CRUDELI, presentata dal Corrisp. A. DI LEGGE [1].

III. Si consideri l'equazione

$$\varrho \frac{\partial u}{\partial \tau} - \mu \Delta^2 u = X - \frac{\partial p}{\partial \xi},$$

dove (in virtù di quanto abbiamo trovato nelle Note precedenti) potremo intendere posto il secondo membro sotto la forma (lo indicheremo allora con L) che desideravamo. E si ponga

$$F = \frac{e^{-\frac{\varrho r^2}{4\mu(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \qquad (t_0 \leq \tau < t).$$

Adesso le ξ, η, ζ rappresentano le coordinate di un punto generico della porzione di fluido considerata all'istante τ; le x, y, z rappresentano le coordinate di un punto *interno* della porzione stessa, all'istante t. La F, come è ben noto nella teoria della propagazione del calore, è una soluzione dell'equazione

$$\varrho \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \mu \Delta^2 \psi = 0.$$

Sicchè, per $t_0 \leq \tau < t$, avremo

$$\varrho \int_{\omega_\tau} \frac{\partial (uF)}{\partial \tau} d\omega_\tau = \mu \int_{\omega_\tau} (F\Delta^2 u - u\Delta^2 F)\, d\omega_\tau + \int_{\omega_\tau} LF d\omega_\tau,$$

[1] Pervenuta all'Accademia il 6 agosto 1912.

dove con ω_τ indichiamo lo spazio occupato dal fluido al tempo τ. Ma

$$\int_{\omega_\tau} \frac{\partial(u\mathrm{F})}{\partial\tau} d\omega_\tau = \int_{\omega_\tau} \frac{d(u\mathrm{F})}{d\tau} d\omega_\tau -$$

$$- \int_{\omega_\tau} \left\{ u \frac{\partial(u\mathrm{F})}{\partial\xi} + v \frac{\partial(u\mathrm{F})}{\partial\eta} + w \frac{\partial(u\mathrm{F})}{\partial\zeta} \right\} d\omega_\tau =$$

$$= \frac{d}{d\tau} \int_{\omega_\tau} u \mathrm{F} d\omega_\tau + \int_{\mathrm{S}_\tau} u u_n \mathrm{F} d\mathrm{S}_\tau .$$

Quindi

$$\varrho \frac{d}{d\tau} \int_{\omega_\tau} u \mathrm{F} d\omega_\tau + \varrho \int_{\mathrm{S}_\tau} u u_n \mathrm{F} d\mathrm{S}_\tau = \mu \int_{\mathrm{S}_\tau} \left(u \frac{d\mathrm{F}}{dn} - \mathrm{F} \frac{du}{dn} \right) d\mathrm{S}_\tau + \int_{\omega_\tau} \mathrm{LF} d\omega_\tau .$$

Da cui, integrando fra t_0 e $t - \varepsilon$, dove $\varepsilon > 0$, avremo

$$(9) \quad \varrho \int_{\omega_{t-\varepsilon}} (u\mathrm{F})_{\tau=t-\varepsilon} d\omega_{t-\varepsilon} = \varrho \int_{\omega_0} (u\mathrm{F})_{\tau=t_0} d\omega_0 - \varrho \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathrm{S}_\tau} u u_n \mathrm{F} d\mathrm{S}_\tau +$$

$$+ \mu \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\mathrm{S}_\tau} \left(u \frac{d\mathrm{F}}{dn} - \mathrm{F} \frac{du}{dn} \right) d\mathrm{S}_\tau + \int_{t_0}^{t-\varepsilon} d\tau \int_{\omega_\tau} \mathrm{LF} d\omega_\tau .$$

Osservo che

$$\int_{\omega_{t-\varepsilon}} (u\mathrm{F})_{\tau=t-\varepsilon} d\omega_{t-\varepsilon} = \int_{\omega_t} (u\mathrm{F})_{\tau=t-\varepsilon} d\omega_t + g_\varepsilon .$$

Ora, poichè (x, y, z) è un punto *interno* dello spazio ω_t, si ha

$$\lim_{\varepsilon=0} g_\varepsilon = 0 .$$

Inoltre, come insegnano i metodi del Betti [1],

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\omega_t} (u\mathrm{F})_{\tau=t-\varepsilon} d\omega_t = \left(2\sqrt{\pi k}\right)^3 \cdot u(x, y, z, t),$$

dove $k = \dfrac{\mu}{\varrho}$.

Quindi dalla (9) si trae la formula, alla quale volevo pervenire: cioè, *qualora* u, v, w, p *siano soluzioni,* della natura supposta, *delle equazioni indefinite del moto lento dei fluidi viscosi, omogenei, incompressibili, si hanno necessariamente,* oltre al resultato ottenuto relativamente alla pressione, *le seguenti formule:*

$$\left(2\sqrt{\pi k}\right)^3 \varrho u(x, y, z, t) = \varrho \int_{\omega_0} (u\mathrm{F})_{\tau=t_0} d\omega_0 - \varrho \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathrm{S}_\tau} u u_n \mathrm{F} d\mathrm{S}_\tau +$$

$$+ \mu \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\mathrm{S}_\tau} \left(u \frac{d\mathrm{F}}{dn} - \mathrm{F} \frac{du}{dn} \right) d\mathrm{S}_\tau + \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{\omega_\tau} \mathrm{LF} d\omega_\tau$$

[1] Memorie di matematica e fisica della Società italiana delle Scienze, serie III, tomo I, parte II (1868), pag. 182.

e le due analoghe, che non scriviamo, trattandosi semplicemente di scambiare, in quella testè scritta, u con v ed L con M per ottenere la seconda, ed u con w ed L con N per ottenere la terza. È manifesto il significato di M e di N.

Formule, però, che non hanno la forma generalizzata del Green.

Moti stazionarii.

IV. Nel caso di moti stazionarî, ponendo nella (3) (ved. Nota I) e nelle due analoghe rispettivamente $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$, si dedurrebbe — con procedimento analogo a quello da me tenuto precedentemente (Note I e II), liberato dalle considerazioni ausiliarie —

$$4\pi p(x, y, z) = \int_\omega \left\{ X \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial \xi} + \cdots \right\} d\omega +$$

$$+ \int_S p \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dn} dS - \mu \int_S \left\{ \frac{du}{dn} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \right\} dS +$$

$$+ \mu \int_S \left\{ u \frac{d}{dn} \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \right\} dS .$$

E quindi, mediante considerazioni analoghe a quelle che ho già fatte relativamente alla pressione nel caso non stazionario, si potrà intendere (a meno di una costante) posta la p sotto la forma desiderata.

Inoltre, avendosi ora

$$\left\{ \begin{array}{l} X - \frac{\partial p}{\partial \xi} + \mu \Delta^2 u = 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ , \end{array} \right.$$

la formula ordinaria del Green basterà ovviamente per completare i nostri resultati nel caso dei moti stazionarî.