

ATTI
DELLA
REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.



ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Fisica. — *Gli sforzi interni nei corpi ferromagnetici posti nel campo magnetico.* Nota preliminare di F. PIOLA e L. TIERI ⁽¹⁾, presentata dal Socio P. BLASERNA ⁽²⁾.

INTRODUZIONE.

1. Clerk Maxwell ⁽³⁾, dando veste matematica ai concetti di Faraday, mostrò che è possibile di concepire le azioni reciproche delle correnti elettriche — ed in particolare le forze agenti su di un elemento magnetizzato posto in un campo magnetico — come dipendenti da uno stato particolare di tensione del mezzo ambiente.

Se l'induzione B è nella stessa direzione del campo magnetico H , questo stato del mezzo si riduce, secondo Maxwell, ad una *pressione* $\frac{1}{8\pi} H^2$ uguale in tutti i sensi — *pressione idrostatica*, come vien detta, — combinata con una *tensione* diretta secondo le linee di forza, ed uguale ad $\frac{1}{4\pi} HB$. Ossia, preso l'asse delle x nella direzione delle linee di forza:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_x = -\frac{1}{8\pi} H^2 + \frac{1}{4\pi} HB \\ p_y = -\frac{1}{8\pi} H^2 \\ p_z = -\frac{1}{8\pi} H^2 \end{array} \right.$$

Quando non vi è magnetizzazione $B = H$ e ne risulta una *tensione* uguale ad $\frac{1}{8\pi} H^2$ secondo le linee di forza, ed una *pressione* pure uguale ad $\frac{1}{8\pi} H^2$ nelle direzioni perpendicolari a questa.

L'esistenza di queste pressioni e tensioni è stata qualitativamente accertata coll'esperimento, ma non altrettanto può dirsi quantitativamente nei mezzi ferromagnetici; e la cosa può giustificarsi quando si pensi che nella trattazione del Maxwell è stata trascurata la reazione che sulla induzione

⁽¹⁾ Al Piola è dovuta la parte generale ed il metodo di ricerca, al Tieri la parte sperimentale.

⁽²⁾ Pervenuta all'Accademia il 30 agosto 1912.

⁽³⁾ Maxwell, *Traité d'électricité et de magnétisme*, Paris, 1887, vol. II, § 642

viene a prodursi per le deformazioni che i mezzi subiscono per effetto appunto delle pressioni e tensioni stesse.

Altri, dopo Maxwell, tentarono di colmare la lacuna e, per es., l'Helmholtz mise in conto la variazione di densità che il mezzo subisce, ed il Kirchhoff ⁽¹⁾, oltre a questa, anche il mutamento di lunghezza nel senso delle linee di forza. Secondo quest'ultimo, la pressione idrostatica P e la tensione T sono rispettivamente date da:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = \frac{1}{8\pi} BH - \frac{1}{2} k' H^2, \\ T = \frac{1}{4\pi} BH - \frac{1}{2} k'' H^2, \end{array} \right.$$

dove k' e k'' sono due coefficienti dipendenti dalle variazioni che la suscettività k dei singoli elementi del corpo subisce per il mutamento negli elementi stessi rispettivamente del volume e della lunghezza parallela alle linee di forza magnetica. Qualora campo ed induzione, e quindi campo ed intensità I di magnetizzazione, siano ugualmente diretti, e si indichino rispettivamente con σ e con λ le dilatazioni $\frac{\delta v}{v}$ cubica, e $\frac{\delta l}{l}$ lineare, si ha:

$$(3) \quad I = H \{ k - \sigma k' - \lambda k'' \}.$$

2. Oltre alle teorie dell'Helmholtz e del Kirchhoff altre ne furono proposte sulla *magnetostrizione*, pur senza potersi dire con sicurezza quali fra esse dovessero essere scartate.

Il sussistere di più teorie, le cui conseguenze sono in disaccordo fra loro, è imputabile al fatto che le azioni da esse prevedute non sono direttamente accessibili alla esperienza. Non essendo direttamente accessibili alla esperienza le forze teoricamente prevedute, si deve ricorrere alla osservazione di fenomeni che alla lor volta sono considerati come dipendenti da quelle. Ma la dipendenza ordinariamente non è univoca, e di qui ne viene incertezza nello stabilire la corrispondenza fra le condizioni magnetiche e questi fenomeni osservabili.

Il Cantone, per es. ⁽²⁾, partendo dalle equazioni del Kirchhoff ed introducendo le costanti elastiche del corpo, calcolò come un ellissoide di rivoluzione allungato, e disposto coll'asse di rotazione parallelo al campo, avrebbe dovuto variare la sua lunghezza ed il suo volume allo stabilirsi di determinate condizioni magnetiche.

Le dilatazioni lineare e cubica erano misurabili, come il momento magnetico ed il campo, per cui potevano ricavarsi i valori dei coefficienti k'

⁽¹⁾ Wiss. Abh. Nachtrag., 1891, pag. 91.

⁽²⁾ Memorie Lincei, 1889, vol. 6^o, pag. 487; Rend. Lincei, 1890, vol. 6^o, pag. 252.

e k'' del Kirchhoff. Questi, introdotti nella (3), venivano a dare, per la variazione della suscettività, valori *plausibili*, almeno per il ferro. Ciò, come lo stesso A. rilevava, non costituiva criterio sicuro per convalidare la teoria; nè la cosa doveva meravigliare, ad onta di tutta l'abilità dello sperimentatore. Infatti, da un lato, nelle condizioni magnetiche, l'induzione presenta isteresi rispetto al campo, e, dall'altro, nelle condizioni elastiche, le dimensioni presentano isteresi rispetto alla forza e quindi quella tale corrispondenza non è sempre determinata. C'è in più da considerare che, come posteriori (1) ricerche hanno dimostrato, le costanti elastiche — delle quali occorre far uso per collegare le variazioni magnetiche a quelle delle dimensioni, e che si determinano coll'applicazione, al corpo, di sforzi meccanici — sono, nei corpi ferromagnetici, funzioni del campo, ed anche dipendono dall'ordine nel quale si susseguono, nel corpo stesso, magnetizzazione e sforzo. Considerazioni analoghe valgono per le ricerche di Nagaoka ed Honda (2).

3. Un'altra via è stata seguita per arrivare a grandezze accessibili alla esperienza, considerando che, come la magnetizzazione influisce sulle dimensioni e sulle costanti elastiche di un corpo ferromagnetico, alla sua volta uno sforzo applicato al corpo stesso ne altera la magnetizzazione.

Il legame di questi fenomeni reciproci è stato da prima trovato da J. J. Thompson (3) e, dopo di lui, altre teorie sono venute svolgendosi su tale indirizzo. Basterà citare quelle di Heydelweiller (4) di Gans (5) e di Koláčèk (6), fondate sopra considerazioni termodinamiche, e quella di Cantone (7) che ha per base la legge, che porta il suo nome, sulla costanza della energia spesa per produrre una determinata magnetizzazione.

Tutte queste teorie arrivano a stabilire relazioni fra la variazione, al mutare del campo, nella lunghezza, nella torsione, e nel modulo di elasticità, e quella, al variar della tensione o della coppia torcente, nella magnetizzazione. Il controllo sperimentale — fatto sopra campioni di ferro, di nikel, di acciaio al tungsteno e di acciaio al nikel di differente titolo, da Honda e Terada (8) — permette di dire che, in prima approssimazione, è verificato quanto hanno di comune le varie teorie. Va notato che, per la torsione e la trazione, ciò che hanno di comune è precisamente quanto si ricava

(1) Honda e Terada, *Phil. Mag.*, 1907, 13°, pag. 36; 14°, pag. 65.

(2) *Phil. Mag.*, 1893, ser. V, vol. 46, pag. 261.

(3) *Application of Dynamics to Physics and Chemistry*, Chap. IV.

(4) *Ann. der Phys.*, XI, pag. 602, 1903.

(5) " " XIII, pag. 634, 1904.

(6) " " XIII, pag. 1, 1904.

(7) *Rend. Ist. Lombardo* 37°, (1904), pp. 435, 474, 535, 567.

(8) *Phil. Mag.*, 1907, 14°, pag. 65.

dalla ipotesi del Cantone, senza alcuna restrizione ⁽¹⁾ rispetto alla suscettività, contrariamente a quanto asseriscono i due fisici giapponesi.

Ma dall'esame delle laboriose misure e, più che tutto, dalla considerazione che nelle ricerche sui fenomeni reciproci magnetoelastici si sottointende sempre legittima la equazione:

$$\frac{\partial}{\partial H} \left(\frac{\partial \xi}{\partial S} \right) = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{\partial \xi}{\partial H} \right),$$

cioè applicabile la inversione nelle derivazioni rispetto al campo magnetico H ed allo sforzo meccanico S o, in altre parole, la nessuna influenza, sullo stato finale del corpo, dell'ordine nel quale questi stimoli vengono applicati — e ciò ⁽²⁾ è stato dimostrato non vero in generale —, si resta molto perplessi se anche questa via possa condurre a risultati soddisfacenti. In ogni modo, per quanto essa possa darci preziose indicazioni sulla dipendenza tra loro dei fenomeni magneto-elastici nei corpi ferromagnetici, nulla ci dice nemmeno essa direttamente sulle forze attive nell'interno dei corpi stessi.

METODO DINAMICO PER LO STUDIO DEGLI SFORZI INTERNI NEI CORPI FERROMAGNETICI POSTI NEL CAMPO MAGNETICO.

4. Come siamo andati esponendo, le difficoltà che si presentano nella misura delle forze interne attive in un corpo ferromagnetico magnetizzato, e posto in un campo magnetico, derivano dal fatto che non abbiamo il modo di paragonarle direttamente con forze esterne a noi note, ma siamo costretti a fare il confronto mediante la osservazione di fenomeni che consideriamo come conseguenza di quelle e di queste: come, per es., colla osservazione delle deformazioni che il corpo subisce. Abbiamo notato la difficoltà di stabilire una corrispondenza univoca fra gli elementi osservati, e

⁽¹⁾ Infatti, per es. per la trazione, dalla equazione del Cantone si ricava subito:

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial p} \int_0^{I_1} H dI = \frac{\partial}{\partial p} \left[H_1 I_1 - \int_0^{H_1} I dH \right],$$

dove ε è la dilatazione per unità di lunghezza, e p la tensione per unità di sezione del filo. Notando che nella ipotesi si suppone di arrivare, con qualunque tensione p , sempre alla stessa magnetizzazione finale I_1 collo stesso campo H_1 , viene: $\frac{\partial}{\partial p} (H_1 I_1) = 0$. Derivando allora rispetto ad H , ed *invertendo* le derivazioni al secondo membro, *come fanno i fisici giapponesi*, viene, in valore assoluto,

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial H} = \frac{\partial I}{\partial p}$$

che è appunto la parte comune alle varie teorie sui fenomeni magneto-elastici reciproci.

⁽²⁾ Honda e Terada, Phil. Mag., 1907, 13°, pag. 36.

ciò sia pel fatto che l'induzione magnetica presenta isteresi rispetto al campo e la deformazione del corpo rispetto alla forza deformatrice, sia per l'influenza che l'ordine di successione, nel quale le azioni magnetiche e meccaniche sono applicate, esercita sul risultato.

Le difficoltà sarebbero tolte se:

1°) il campo variasse ciclicamente in modo da avere, per ogni valore di esso, determinata la storia anteriore del corpo, e quindi un ben definito valore della induzione;

2°) la forza esterna fosse applicata pure ciclicamente in modo da avere, per ogni valore di essa, un ben definito valore della deformazione;

3°) infine campo e forza esterna agissero contemporaneamente in modo da togliere le incertezze derivanti dall'ordine loro di successione ed in modo da compensarsi nei loro effetti e, in particolare, da annullare le deformazioni che tenderebbero a produrre separatamente, in senso opposto, e che colla loro reazione altererebbero gli elementi in gioco. Si dovrebbe così tornare alle azioni pure di Maxwell.

Senza descrivere qui un primo metodo impiegato, e che aveva per base il confronto fra i cicli statici elastico e magneto-elastico, esponiamo un metodo dinamico che ci sembra raggiungere in modo più efficace le condizioni sopra indicate. Diciamo subito che il risultato al quale arrivammo col secondo metodo l'avevamo già avuto, per quanto con minore sicurezza, col primo, e che anzi il risultato stesso delle prime ricerche ha servito ad indirizzare le disposizioni sperimentali che qui sono descritte.

Le condizioni sopra indicate sarebbero raggiunte, se:

1°) il campo fosse ottenuto mediante una corrente elettrica alternata, di frequenza ed ampiezza costanti;

2°) la forza esterna fosse prodotta pure mediante una corrente elettrica alternata;

3°) le due correnti, producenti rispettivamente campo e forza esterna, agissero contemporaneamente, e la legge secondo la quale varia la seconda potesse essere mutata in modo da compensare gli effetti della prima.

Il mutamento nella legge di variazione della corrente può esser fatto mediante quantità variabile di ferro abbracciato dal circuito della corrente stessa: come ciò possa farsi *sistematicamente*, faremo vedere nel lavoro definitivo.

Ottenuto il compenso ed analizzata, coi mezzi noti e largamente impiegati in elettrotecnica, la corrente producente la forza, sarebbe facile, dalle condizioni geometriche degli apparecchi, risalire alla legge di variazione della forza, e quindi mettere in relazione questa col campo e con la magnetizzazione.

Qualora non si riuscisse a ottenere il compenso perfetto, non per questo il metodo cesserebbe di prestare utili servigi, in quanto che sarebbe sempre un metodo *differenziale* di ricerca, e di questo presenterebbe tutti i vantaggi.

5. Il sopra indicato metodo diretto, per la determinazione delle forze interne nei corpi ferromagnetici, abbiamo voluto applicarlo allo studio della *tensione* che si genera nel nikel parallelamente alle linee di forza del campo magnetico nel quale è posto, riservandoci in seguito di studiare la *pressione idrostatica* e di estendere le ricerche ad altri corpi ferromagnetici. Abbiamo considerato da prima la tensione come quella che dà effetti più cospicui, ed abbiamo iniziato il nostro studio col nikel perchè esso, fra i corpi ferromagnetici, si comporta nel modo più semplice rispetto alla magnetizzazione, in quanto che esso sempre si accorcia al crescer del campo magnetico nel quale è posto, mentre il ferro da prima si allunga, raggiunge un massimo (punto del Villari) e poi si accorcia, e in modo opposto si comporta il cobalto.

Ma un'altra ragione ci ha spinti, ed è stata che il nikel ci è sembrato presentare interesse maggiore degli altri corpi in quanto pare che anche gli altri vengano a comportarsi come esso, purchè siano convenientemente trattati: il Bidwell⁽¹⁾ infatti ha dimostrato che il ferro, accuratamente ricotto sempre si accorcia al crescer del campo magnetico, come se il punto del Villari, con la ricottura, venisse a corrispondere allo zero dei campi. Analogamente, nel cobalto, il punto del Villari si allontana dall'origine, tendendo pure questo metallo a sempre restringersi col crescer del campo. Anche l'aumento del carico⁽²⁾ ha sul ferro lo stesso effetto.

6. Il nikel sottoposto ad esame era un filo ricotto, del diametro di mm. 0,7 e lungo cm. 81, mantenuto verticale entro un tubo di vetro interno ad un secondo tubo pure di vetro. Fra i due tubi, nell'intercapedine, si manteneva una corrente d'acqua allo scopo di sottrarre il nikel alle influenze termiche esterne.

Agli estremi del filo erano saldate due asticine di ottone, delle quali l'una era fissata superiormente, e l'altra, collegata ad uno dei bracci di una delicata leva di ottone munita di specchietto, si prolungava in una sospensione di alluminio. Nelle prime esperienze, al posto della leva metallica avevamo applicato la disposizione a filo di bozzolo del Righi, della quale uno di noi⁽³⁾ si era già servito utilmente. Ma ci siamo accorti che, da un lato, tale disposizione non veniva a seguire abbastanza bene le oscillazioni che volevamo produrre, e, dall'altro, mancava la ragione del preoccuparci del piccolo attrito che poteva presentare una leggiera asticina girevole fra due

(1) Proc. R. Soc. Lond., vol. LV, pag. 228; vol. LXXIV, pag. 60.

(2) Grimaldi e Accolla, Atti Acc. Gioenia di Catania, ser. 5^a, vol. II, Mem. XIV; Honda e Terada, Phil. Mag., 1907, vol. 13^a, pag. 36.

(3) Tieri, Rend. Lincei, 1908, vol. XVII, 2^o sem., pag. 204.

punte d'ago, come era la nostra leva, quando, pur essendo molto piccoli gli spostamenti, le forze colle quali avevamo a che fare erano relativamente rilevanti.

7. Il campo magnetico era prodotto mediante un'elica lunga cm. 86 e del diametro medio di cm. 1,4, formata di filo di rame del diametro di mm. 0,2. Le spire erano avvolte uniformemente in 6 strati, e di esse se ne avevano 211 per centimetro. Il filo di nikel si trovava lungo l'asse dell'elica ed occupava una regione dove il campo prodotto da una corrente elettrica circolante nell'elica poteva ritenersi costante. L'elica aveva i suoi capi collegati, a traverso resistenze ed auto, alla rete cittadina di corrente alternata.

La trazione esterna veniva applicata per mezzo dell'azione reciproca di due rocchetti percorsi da corrente elettrica. A tale scopo la sospensione di alluminio, nella quale si prolungava, come s'è detto, l'asticina di ottone fissata all'estremo inferiore del filo di nikel, portava un largo rocchetto coll'asse verticale. Di fronte a questo, e con lo stesso asse, si trovava un secondo rocchetto ed ambidue erano costituiti da filo di rame del diametro di mm. 0,8, avevano il raggio medio di cm. 20 e la sezione quadrata: però, il fisso avea 200 spire, ed il sospeso soltanto 100. La distanza fra le basi affacciate era di cm. 1,8, tanto grande cioè da poter essere considerata costante durante la variazione di lunghezza, di pochi millesimi di mm., che l'intero sistema nikel e alluminio veniva a subire sotto l'azione della trazione o del campo. I due rocchetti erano collegati in serie fra loro, per cui la loro attrazione era in ogni istante proporzionale al quadrato della corrente attiva nell'istante stesso, ed erano congiunti, traverso resistenze ed auto, agli stessi punti della rete cittadina di corrente alternata ai quali era collegata l'elica magnetizzante.

8. Agendo la sola attrazione dei rocchetti, — supposta di forma sinusoidale la corrente e proporzionale alla trazione l'allungamento, — è facile vedere che si avrà nel sistema un allungamento costante e, intorno ad esso, un allungamento sinusoidale di frequenza doppia di quella della corrente e sfasato su questa.

Infatti, tenendo conto che nel nostro apparecchio la massa in movimento è, quasi esclusivamente, raccolta nel rocchetto appeso all'estremo inferiore della sospensione e che pure lo smorzamento al moto è dovuto preponderantemente alla resistenza che esso rocchetto incontra a muoversi nell'aria; considerando ancora che la reazione del sostegno superiore del filo è, in ogni istante, uguale alla forza risultante all'estremo inferiore della sospensione e proporzionale, per la ipotesi fatta, all'allungamento totale del sistema; la equazione differenziale alla quale dovrà soddisfare l'allungamento stesso, cioè lo spostamento x dell'estremo inferiore, sarà:

$$(4) \quad M \frac{d^2x}{dt^2} + A \frac{dx}{dt} + Bx = F_0 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} F_0 (1 - \cos 2 \omega t).$$

In questa equazione si è indicato:

con F_0 il valore massimo della forza traente applicata all'estremo inferiore della sospensione, e che è proporzionale al quadrato del valore massimo della corrente e dipende dalle condizioni geometriche proprie e reciproche dei due rocchetti;

con M la massa del rocchetto mobile;

con A il coefficiente di smorzamento;

con B il coefficiente di allungamento dell'intero sistema per modo che, se questo fosse un cilindro omogeneo, si avrebbe: $B = E \frac{s}{l}$, con E = modulo di elasticità, s = sezione ed l = lunghezza.

L'integrale generale della (4) è:

$$(5) \quad x = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} + \frac{F_0}{2B} - \frac{F_0}{2K} \cos(2\omega t + \varphi),$$

dove i primi due termini si annullano dopo un tempo sufficientemente lungo, poichè C_1 e C_2 sono costanti arbitrarie mentre α_1 ed α_2 sono essenzialmente negative, essendo soluzioni della equazione

$$My^2 + Ay + B = 0$$

a coefficienti tutti di ugual segno.

Resta dunque, quando siano spente le oscillazioni proprie del sistema,

$$(6) \quad x = \frac{F_0}{2B} - \frac{F_0}{2K} \cos(2\omega t + \varphi),$$

come s'era detto, con

$$(7) \quad K^2 = (4\omega^2 M - B)^2 + 4\omega^2 A^2,$$

$$(8) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\omega A}{4\omega^2 M - B},$$

come è facile verificare.

9. Qualora resti invariata la lunghezza del filo di nikel, cioè immobile l'estremo inferiore di questo e quindi quello superiore della sospensione, la B , che indicheremo con B' , si riferirà alla sola sospensione di alluminio; e la forza esterna alla quale sarà soggetto l'estremo inferiore stesso del nikel, sarà:

$$(9) \quad F' = B'x = \frac{1}{2} F_0 \left\{ 1 - \frac{B'}{K'} \cos(2\omega t + \varphi') \right\},$$

avendo indicato con K' e φ' ciò che diventano K e φ sostituendo in essi B' a B .

