ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

di cui due sulla generatrice ulteriore comune al cono cubico ed al piano che lo tocca nel punto base doppio.

3. I sistemi lineari così ottenuti sul cono cubico rientrano tutti nel sistema ∞^6 delle C^6 con un punto base doppio, A; sistema che, com'è noto, si può segare mediante le quadriche tangenti al cono in A.

Ne segue che le F^5, di cui ho dato la descrizione, hanno in comune la proprietà di esser proiezioni della F^8 di S_6 rappresentata sul cono cubico ellittico dal sistema lineare anzidetto.

Meccanica. — *Sulla deformazione idrostatica degli scafi.* Nota di U. Cisotti, presentata dal Corrisp. O. Tedone [1].

Le forze agenti sullo scafo di una nave liberamente galleggiante (oppure di un sottomarino totalmente immerso) in equilibrio in mare tranquillo, si riducono, com'è noto, al peso dello scafo (e dei corpi eventualmente su esso caricati) e alle pressioni idrostatiche superficiali.

Queste forze costituiscono un sistema staticamente nullo: ad esse rimane però subordinata una deformazione dello scafo.

Della entità di questa deformazione sono bene edotti gli architetti navali. Ed in vero, nell'assegnare le dimensioni e la struttura geometrica e materiale dello scafo di una nave, si ricorre ordinariamente ai criterî della meccanica applicata per avere indicazioni, per quanto è possibile più vicine alla realtà, circa il massimo cimento cui può venire sottoposto lo scafo, senza che questo abbia a perdere le qualità elastiche, e trovarsi, di conseguenza, in pericolo di rottura [2].

Non è pertanto da trascurarsi ogni contributo, per quanto modesto, atto a precisare vieppiù lo stato di deformazione idrostatica di un solido immerso in un liquido: sia parzialmente (nave) oppure anche totalmente (sottomarino).

Per questa considerazione nutro fiducia che possano presentare qualche interesse le formule assai semplici che formano oggetto della presente Nota.

Le formule in questione permettono di valutare il valor medio della contrazione cubica. Mi riferisco al caso di un solido omogeneo, anche molteplicemente connesso. Intendo, con ciò, che il solido può presentare nel suo interno quante vogliansi cavità.

Sieno: S il volume del galleggiante (intendo dire lo spazio effettivamente riempito dal materiale); h l'abbassamento del suo centro di gravità

[1] Pervenuta all'Accademia il 22 giugno 1912.

[2] Cfr. ad es. — mi limito ad accennare autori italiani — Scribanti, *Lezioni sui calcoli relativi alla robustezza longitudinale degli scafi*. Genova, tip. R. Ist. Sordomuti, 1903, pp. 14 e seg.; Russo, *Manuale di architettura navale*. Torino-Roma, Roux e Viarengo, 1905, pp. 32 e seg.

dalla sezione di affioramento; S' il volume d'acqua spostata; p_0 la pressione atmosferica alla superficie libera; g l'accelerazione di gravità.

Assunta eguale ad 1 la densità del liquido, il valor medio C della contrazione cubica del galleggiante è definito dalla formula assai semplice

$$\mathrm{C} = q\left[p_0 + gh\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}\right], \tag{I}$$

q designando una costante che dipende solo dalle qualità elastiche del galleggiante, e che nel caso di materiale isotropo è il noto *coefficiente di compressibilità cubica.*

Se il solido ha delle cavità interne, nelle quali regni una pressione costante pari all'atmosfera p_0, la formula (I) continua a valere.

Se il solido è completamente immerso, S' coincide con $\boldsymbol{\Sigma}$, designando con tale lettera lo spazio limitato dalla superficie *esterna* del solido.

$\boldsymbol{\Sigma}$ coincide manifestamente con S quando il solido è privo di cavità. In caso opposto, chiamando $\mathrm{S}_1, \mathrm{S}_2, \ldots \mathrm{S}_n$ le cavità interne, si ha ovviamente

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{S} + \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \cdots + \mathrm{S}_n ;$$

e la (I) dà, per *gli scafi completamente immersi*, la formula notevole

$$\mathrm{C} = q\left[p_0 + gh\left(1 + \frac{\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \cdots + \mathrm{S}_n}{\mathrm{S}}\right)\right]. \tag{I'}$$

La formula fondamentale (I), come vedremo, è una immediata conseguenza del classico *teorema di reciprocità di Betti.*

1. *Richiamo della formula di Betti.* — Siano x, y, z le coordinate di un generico punto di un corpo elastico omogeneo, le cui 21 costanti elastiche indicheremo, seguendo il Cesàro, colle lettere

$$\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\ ;\ \mathrm{F}, \mathrm{G}, \mathrm{H}\ ;\ \mathrm{A}', \mathrm{B}', \mathrm{C}'\ ;\ \mathrm{F}', \mathrm{G}', \mathrm{H}'\ ;$$
$$\mathrm{F}_1, \mathrm{G}_1, \mathrm{H}_1\ ;\ \mathrm{F}_2, \mathrm{G}_2, \mathrm{H}_2\ ;\ \mathrm{F}_3, \mathrm{G}_3, \mathrm{H}_3 .$$

Sia ϱ la densità del solido; S lo spazio da esso occupato e σ la superficie (o il complesso delle superficie) che limita S. Designino: **F** la forza unitaria di massa; $\boldsymbol{\Psi}$ gli sforzi specifici distribuiti sopra σ.

Introduciamo il vettore **s**, le cui componenti s_x, s_y, s_z sono definite dalle relazioni

$$\left\{\begin{aligned} s_x &= ax + ny + mz , \\ s_y &= nx + by + lz , \\ s_z &= mx + ly + cz , \end{aligned}\right. \tag{1}$$

essendo a, b, c, l, m, n costanti determinate dal seguente sistema di equazioni lineari:

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\mathrm{A}\,a + \mathrm{C}'b + \mathrm{B}'c = -1\,,\\
&\mathrm{C}'a + \mathrm{B}b + \mathrm{A}'c = -1\,,\\
&\mathrm{B}'a + \mathrm{A}'b + \mathrm{C}c = -1\,,\\
&\mathrm{F}\,l + \mathrm{H}'m + \mathrm{G}'n = -\tfrac{1}{2}(a\mathrm{F}_1 + b\mathrm{F}_2 + c\mathrm{F}_3)\,,\\
&\mathrm{H}'l + \mathrm{G}m + \mathrm{F}'n = -\tfrac{1}{2}(a\mathrm{G}_1 + b\mathrm{G}_2 + c\mathrm{G}_3)\,,\\
&\mathrm{G}'l + \mathrm{F}'m + \mathrm{H}n = -\tfrac{1}{2}(a\mathrm{H}_1 + b\mathrm{H}_2 + c\mathrm{H}_3)\,.
\end{aligned}\right.
$$

Θ essendo il coefficiente di dilatazione cubica, si ha, dopo ciò, la formula (¹)

$$
(3)\qquad -\int_{\mathrm{S}} \Theta\, d\mathrm{S} = \int_{\mathrm{S}} \varrho \mathbf{F} \times \mathbf{s}\, d\mathrm{S} + \int_{\sigma} \boldsymbol{\Psi} \times \mathbf{s}\, d\sigma\,.
$$

Questa formula, dovuta a Betti, fa conoscere la contrazione totale del solido elastico, quando siano note le forze esterne.

2. *Deformazione idrostatica.* — Immaginiamo, per maggior generalità, che lo spazio S, occupato dal solido elastico, sia molteplicemente connesso. In modo preciso entro lo spazio Σ limitato dalla superficie *esterna* σ di S, vi siano n cavità S_1, S_2, ... S_n, limitate alla lor volta da altrettante superficie chiuse σ_1, σ_2, ... σ_n, di guisa che si ha

$$
\Sigma = \mathrm{S} + \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \cdots + \mathrm{S}_n\,.
$$

Immaginiamo ancora il solido galleggiante sopra un liquido omogeneo di densità unitaria, e il tutto in equilibrio.

Designi z la quota di un generico punto, contata positivamente verso il basso a partire dal baricentro P_0 di S.

Detta p la pressione in un generico punto del liquido, p_0 la pressione atmosferica, $-h$ la quota della sezione di affioramento, abbiamo, come è ben noto,

$$
(4)\qquad p = p_0 + g(z + h)\,,
$$

g essendo l'accelerazione della gravità.

Diciamo σ' la porzione di σ immersa nell'acqua, e σ'' quella a contatto coll'aria atmosferica. Tanto σ' quanto σ'' sono soggette, in ogni lor punto, a pressioni normali: quest'ultima con un'intensità uniforme p_0, l'altra con una intensità la cui legge di variazione è definita da (4).

(¹) Cfr. ad es. Cesàro, *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*. Torino, Bocca, 1894, pag. 46.

Ammettiamo che, nelle eventuali cavità $S_1, S_2, \dots S_n$, regni una pressione costante p_0.

Notiamo infine che le forze di massa agenti sul solido si riducono ai pesi dei singoli suoi elementi: pertanto la forza di massa unitaria è $\mathbf{g}$.

Ciò posto, se si indica con $\mathbf{n}$ il vettore unitario normale, in un generico punto, alle superficie che limitano S, diretto verso l'interno di S, si ottiene, applicando la (3) al caso nostro,

$$(6) \qquad -\int_S \Theta\, dS = \varrho \int_S \mathbf{g} \times \mathbf{s}\, dS + \int_{\sigma'} p\,\mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma' + \\ + p_0 \int_{\sigma''} \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma'' + p_0 \sum_1^n{}_i \int_{\sigma_i} \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma_i .$$

Si noti ora che, per le (1),

$$\mathbf{g} \times \mathbf{s} = g s_z = g(m r_x + l r_y + c r_z),$$

avendo indicato con $\mathbf{r}$ il vettore $P - P_0$, e corrispondentemente con $r_x = x$, $r_y = y$, $r_z = z$ le sue componenti rispetto ad una terna di assi coll'origine in P_0 e avente per terzo asse la verticale discendente.

Si tenga inoltre presente la identità

$$(7) \qquad \int_S \mathbf{r}\, dS = 0 .$$

Risulta allora, identicamente,

$$(8) \qquad \int_S \mathbf{g} \times \mathbf{s}\, dS = g \int_S (m r_x + l r_y + c r_z)\, dS = 0 .$$

D'altro canto, per la (4), si ha

$$\int_{\sigma'} p\,\mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma' = p_0 \int_{\sigma'} \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma' + g \int_{\sigma'} (z + h)\, \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma' ;$$

ovvero, poichè sulla sezione di affioramento è $z = -h$, potremo scrivere, chiamando τ questa sezione,

$$(9) \qquad \int_{\sigma'} p\,\mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma' = p_0 \int_{\sigma'} \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma' + g \int_{\sigma'+\tau} (z + h)\, \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma .$$

Ciò posto, per le (8) e (9), la (6) diviene

$$-\int_S \Theta\, dS = p_0 \int_{\sigma+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n} \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma + g \int_{\sigma'+\tau} (z + h)\, \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma .$$

Si noti che $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_n$ costituiscono il contorno completo di S, e che

σ' e τ limitano il volume S' del liquido spostato. Avremo dunque, applicando il teorema della divergenza a ciascuno dei due integrali del secondo membro, e tenendo presenti (1) e (7),

$$\int_{\sigma+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_n} \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma = -\int_{S} \operatorname{div} \mathbf{s}\, dS = -(a+b+c)\, S,$$

$$\int_{\sigma'+\tau} (z+h)\, \mathbf{n} \times \mathbf{s}\, d\sigma = -\int_{S'} \operatorname{div} [(z+h)\, \mathbf{s}]\, dS' = -(a+b+c)\, h S'.$$

Sostituendo, si otterrà

$$-\int_{S} \Theta\, dS = -(a+b+c)\,(p_0\, S + ghS').$$

Dividendo ambo i membri per S e ponendo

$$(10) \qquad C = -\frac{1}{S}\int_{S} \Theta\, dS \quad , \quad -q = a+b+c,$$

con che C designa il valor medio della contrazione cubica, si ha in definitiva

$$(11) \qquad C = q\left[p_0 + gh\,\frac{S'}{S}\right],$$

che è la formula che si voleva dimostrare.

Matematica. — *Sopra un' estensione del teorema di Riesz-Fisher.* Nota II del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrispondente G. LAURICELLA.

4. Dal teorema dimostrato nella nostra Nota precedente, vogliamo trarre alcune conseguenze di cui vedremo l' importanza per l'applicazione alla risoluzione di un nuovo tipo di equazioni integrali.

Sia data una funzione $H(\xi, x)$, reale e *simmetrica* delle due variabili reali ξ, x; tale che l' integrale, in senso di Lebesgue $\int_0^1 (H(\xi, x))^2$ risulti una funzione di x, *finita e continua inferiore ad un numero finito* **M**, *in tutto il campo* $0 \leq x \leq 1$. Supponiamo inoltre che $H(\xi, x)$ costituisca un nucleo *quasi definito*: con ciò intendiamo che l' integrale doppio

$$\int_0^1\int_0^1 p(\xi)\, p(x)\, H(\xi, x)\, d\xi\, dx$$

non risulti negativo, qualunque sia la funzione $p(\xi)$, purchè sommabile, insieme col suo quadrato, in senso di Lebesgue nell' intervallo (0 1).

Se allora diciamo $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ i valori eccezionali del nucleo $H(\xi, x)$; $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots$ le funzioni eccezionali corrispondenti in modo che si abbia

$$\Phi_n(x) + \lambda_n \int_0^1 \Phi_n(\xi)\, H(\xi, x)\, d\xi = 0 ,$$

le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ sono tutte negative [1]: esse si possono ordinare in una serie procedente secondo l'ordine crescente dei loro valori assoluti: e ciò supposto, se, come avviene in generale, esse sono in numero infinito, la successione $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$ tende, al crescere di n, al limite $-\infty$.

Supponiamo ancora che sia data una funzione $\theta(\xi)$ integrabile insieme al suo quadrato in senso di Lebesgue nell'intervallo (01) ed una funzione $\gamma(\xi, t)$ finita e continua *senza eccezione*, rispetto alla coppia di variabili x, t per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$.

Supponiamo scelto il numero M così grande che si abbia

$$\int_0^1 [H(\xi, x)]^2 d\xi < M , \quad \int_0^1 (\theta(\xi))^2 d\xi < M , \quad \int_0^1 [\gamma(\xi, t)]^2 d\xi < M$$
$$0 \leq x \leq 1 , \; t_0 \leq t .$$

Ciò stabilito, poniamo:

$$\text{(12)} \qquad A_n = \int_0^1 \int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\eta)\, H(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \quad , \quad B_n(t) = \int_0^1 \gamma(\xi, t)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi$$

$$\text{(13)} \qquad Q_n(t) = A_n e^{\lambda_n(t - t_0)} + \int_{t_0}^t e^{\lambda_n(t-\tau)} B_n(\tau)\, d\tau$$
$$n = 1, 2, \dots$$

Le funzioni $Q_n(t)$ sono funzioni di t, finite e continue per $t \geq t_0$, derivabili rispetto a t, colle derivate $Q'_n(t)$ finite e continue per $t > t_0$.

Oggetto di questa Nota II è di mostrare che esiste una funzione $v(x, t)$, finita e *continua, senza eccezione*, rispetto alla coppia di variabili x, t, per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$; derivabile rispetto a t (la derivata $\frac{\partial v}{\partial t}$ essendo una funzione integrabile parzialmente rispetto ad x, in senso di Lebesgue,

[1] Infatti si ha

$$\int_0^1 \int_0^1 \Phi_\rho(\xi)\, \Phi_\rho(x)\, H(\xi, x)\, d\xi\, dx = -\lambda_\rho \int_0^1 (\Phi_\rho(\xi))^2 d\xi = -\lambda_\rho ,$$

da cui, poichè il nucleo $H(\xi, x)$ è quasi definito segue: $\lambda_\rho \leq 0$. Ma $\lambda_\rho = 0$ non può essere, perchè si avrebbe allora $\Phi_\rho(x) \equiv 0$, onde è $\lambda_\rho < 0$.

nell' intervallo (0 1), qualunque sia $t \geq t_0$), che verifica le equazioni:

$$\int_0^1 \Phi_m(x)\, v(x\,,t)\, dx = Q_m(t) \quad , \quad \int_0^1 [v(x\,,t)]^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n(t))^2$$

$$\int_0^1 \Phi_m(x)\, \frac{\partial v(x\,,t)}{\partial t}\, dx = Q'_m(t) \qquad\qquad m = 1\,,2\,,\ldots,$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (Q_n(t))^2$ essendo convergente uniformemente per $t \geq t_0$.

5. Lemma II. *La serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\, Q_n(t) \tag{14}$$

converge assolutamente ed uniformemente rispetto alla coppia di variabili $x\,,t$ *per* $0 \leq x \leq 1$, $t \geq t_0$.

Si ha infatti dalla (12), ricordando che $\Phi_1(x)\,,\Phi_2(x)\,,\ldots$ sono le funzioni eccezionali al nucleo $H(\xi\,,x)$

$$A_n = \int_0^1\int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\eta)\, H(\xi\,,\eta)\, d\xi\, d\eta = -\frac{1}{\lambda_n}\int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi\,. \tag{15}$$

D'altra parte applicando il teorema del valor medio, detto t^* un valore intermedio fra t_0 e t, si ha:

$$\int_{t_0}^{t} e^{\lambda_n(t-\tau)} B_n(\tau)\, d\tau = \frac{1 - e^{\lambda_n(t-t_0)}}{\lambda_n}\, B_n(t^*) = \tag{16}$$

$$= \frac{1 - e^{\lambda_n(t-t_0)}}{\lambda_n} \int_0^1 \gamma(\xi\,,t^*)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi\,.$$

Dalla (13), tenendo presente le (15), (16) si ha quindi:

$$\Phi_n(x)\, Q_n(t) = \Phi_n(x) \left\{ A_n\, e^{\lambda_n(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_n(t-\tau)} B_n(\tau)\, d\tau \right\} =$$

$$= -\frac{e^{\lambda_n(t-t_0)}\, \Phi_n(x)}{\lambda_n} \int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi \; +$$

$$+ \frac{1 - e^{\lambda_n(t-t_0)}}{\lambda_n}\, \Phi_n(x) \int_0^1 \gamma(x\,,t^*)\, \Phi_n(x)\, dx =$$

$$= e^{\lambda_n(t-t_0)} \int_0^1 \Phi_n(\eta)\, H(\eta\,,x)\, d\eta \int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi \; +$$

$$+ (e^{\lambda_n(t-t_0)} - 1) \int_0^1 \Phi_n(\eta)\, H(\eta\,,x)\, d\eta \int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi\,,$$

da cui segue, tenuto conto che le λ_n sono negative e si considerano solo valori di $t \geq t_0$

$$|\Phi_n(x)\, Q_n(t)| < \left| \int_0^1 \Phi_n(\eta)\, H(\eta, x)\, d\eta \int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi \right| +$$

$$+ \left| \int_0^1 \Phi_n(\eta)\, H(\eta, x)\, d\eta \int_0^1 \gamma(\xi, t^*)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi \right| .$$

Ma allora, secondo una formula ben nota di E. Schmidt (¹), si ha

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \Phi_n(\eta)\, H(\eta, x)\, d\eta \int_0^1 \theta(\xi)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^1 [H(\eta, x)]^2\, d\eta \int_0^1 (\theta(\xi))^2\, d\xi} \leq M$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 \Phi_n(\eta)\, H(\eta . x)\, d\eta \int_0^1 \gamma(\xi, t^*)\, \Phi_n(\xi)\, d\xi \right| \leq$$

$$\leq \sqrt{\int_0^1 [H(\eta, x)]^2\, d\eta \int_0^1 [\gamma(\xi, t^*)]^2\, d\xi} \leq M$$

Ciò porta, come conseguenza:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(x)\, Q_n(t)| < 4M$$

$$\varrho' > \varrho$$

(¹) Cfr. E. Schmidt, *Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener*. Math. Ann., Bd. LXIII.

Sia $Q(z, x)$ una funzione reale delle variabili reali z, x per $a \leq x \leq b$, $a \leq z \leq b$, integrabile parzialmente rispetto ad x nell'intervallo ab, insieme al suo quadrato $Q^2(z, x)$: $f(x)$ una funzione integrabile insieme al suo quadrato nello stesso intervallo. Siano inoltre $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots$ una successione infinita di funzioni normali ortogonali nello stesso intervallo. Si ha allora (loc. cit., § 2) la formula seguente:

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \left| \int_a^b f(y)\, \psi_\nu(y)\, dy \int_a^b Q(z, x) \psi_\nu(x)\, dx \right| <$$

$$< 2 \sqrt{\int_0^1 (Q(z, x))^2\, dx} \sqrt{\sum_{\nu=n}^{\infty} \left(\int_a^b f(y)\, \psi_\nu(y)\, dy \right)^2}$$

ma si ha pure (ibid., § 1):

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} \left(\int_a^b f(y)\, \psi_\nu(y)\, dy \right)^2 \leq \int_a^b (f(x))^2\, dx ,$$

formule valide per ogni intero e positivo n. Da queste due disuguaglianze, seguono immediatamente le formule del testo.

e da questa disuglianza discende senz'altro la convergenza assoluta ed uniforme della serie (14).

6. Lemma III. *Le serie* $\sum_{n=1}^{\infty}(Q_n(t))^2$, $\sum_{n=1}^{\infty}(Q'_n(t))^2$ *convergono uniformemente per tutti i valori di* $t \geqq t_0$.

Si ha infatti, sostituendo nell'espressione (13) i valori di A_n. $B_n(t)$ tratti dalle (15), (16)

$$Q_n(t) = A_n e^{\lambda_n(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{\lambda_n(t-\tau)} B_n(\tau)\, d\tau =$$

$$= -\frac{e^{\lambda_n(t-t_0)}}{\lambda_n}\int_0^1 \theta(\xi)\,\Phi_n(\xi)\, d\eta + \frac{1-e^{\lambda_n(t-t_0)}}{\lambda_n}\int_0^1 \gamma(\xi\,,\,t^\star)\,\Phi_n(\xi)\, d\xi\,,$$

da cui segue, tenuto conto che le λ_n sono quantità negative e si considerano valori di $t \geqq t_0$

$$|\lambda_n\, Q_n(t)| \leqq \left|\int_0^1 \theta(\xi)\,\Phi_n(\xi)\, d\xi\right| + \left|\int_0^1 \gamma(\xi\,,\,t^\star)\,\Phi_n(\xi)\, d\xi\right|.$$

e quindi

$$\lambda_n^2(Q_n(t))^2 \leqq 2\left(\int_0^1 \theta(\xi)\,\Phi_n(\xi)\, d\xi\right)^2 + 2\left(\int_0^1 \gamma(\xi\,,\,t^\star)\,\Phi_n(\xi)\, d\xi\right)^2,$$

da cui, per la disuguaglianza di Schwartz, tenuto conto che le $\Phi_n(x)$ sono normali e ortogonali

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2(Q_n(t))^2 \leqq 2\int_0^1 (\theta(\xi))^2\, d\xi + 2\int_0^1 (\gamma(\xi\,,\,t^\star))^2\, d\xi \leqq 4\mathrm{M}\,,$$

e da questa disuguaglianza, tenendo conto che le λ_n crescono indefinitamente in valore assoluto, discende *a fortiori* la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(Q_n(t))^2.$$

Passiamo alla serie delle derivate: otteniamo, dalla (13)

$$Q'_n(t) = \lambda_n\, Q_n(t) + \int_0^1 \gamma(\xi\,,\,t)\,\Phi_n(\xi)\, d\xi\,,$$

e conseguentemente:

$$\tfrac{1}{2}(Q'_n(t))^2 \leqq \lambda_n^2(Q_n(t))^2 + \left(\int_0^1 \gamma(\xi\,,\,t)\,\Phi_n(\xi)\, d\xi\right)^2,$$

da cui, tenuto conto della disuguaglianza precedente, si raccoglie

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(Q'_n(t))^2 \leqq 4\mathrm{M} + \int_0^1 (\gamma(\xi\,,\,t))^2\, d\xi \leqq 5\mathrm{M}\,,$$

ovvero

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Q'_n(t))^2 \leq 10M \qquad t \geq t_0$$

disuguaglianza, che prova che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (Q'_n(t))^2$ converge uniformemente per $t \geq t_0$.

7. *Corollario.* Siccome la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (Q'_n(t))^2$ converge uniformemente per $t \geq t_0$, ne segue, secondo il teorema dimostrato nella nostra Nota I [1], che *è possibile determinare dei numeri interi, positivi e crescenti,* μ_1, μ_2, μ_3, ... *tali che posto:*

$$\text{(17)} \qquad S_m(x, t) = \Phi_1(x)\, Q'_1(t) + \Phi_2(t)\, Q'_2(t) + \cdots + Q_m(x)\, Q'_m(t)$$

la serie:

$$\text{(18)} \qquad S_{\mu_1}(x, t) + (S_{\mu_2}(x, t) - S_{\mu_1}(x, t) + \cdots$$

sia convergente uniformemente in generale rispetto ad x *per* $0 \leq x \leq 1$, *ed uniformemente rispetto a* t *per* $t \geq t_0$ (nel senso spiegato al n. 1 della Nota I).

8. I numeri $\mu_1, \mu_2, \ldots$ essendo quelli stessi indicati or ora, formiamo le espressioni

$$\text{(19)} \qquad R_m(x, t) = \Phi_1(x)\, Q_1(t) + \Phi_2(x)\, Q_2(t) + \cdots + \Phi_m(x)\, Q_m(t).$$

Sarà evidentemente $S_m(x, t) = \dfrac{\partial R_m(x, t)}{\partial t}$. Dalla convergenza assoluta ed uniforme della serie (14) discende che anche la serie:

$$\text{(20)} \qquad R_{\mu_1}(x, t) + (R_{\mu_2}(x, t)\, R_{\mu_1}(x, t)) + \cdots$$

converge assolutamente ed uniformemente per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$. Il corollario precedente ci mostra di più che la serie è derivabile parzialmente rispetto a t, termine a termine, e la serie delle derivate converge uniformemente rispetto a t per $t \geq t_0$, uniformemente in generale rispetto ad x, per $0 \leq x \leq 1$.

Ed allora, detta $v(x, t)$ la somma della serie (20), $v(x, t)$ è una funzione finita e continua delle variabili x, t per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$, derivabile rispetto a t (la derivata $\dfrac{\partial v(x, t)}{\partial t}$ essendo una funzione integrabile parzialmente rispetto ad x in senso di Lebesgue, qualunque sia $t \geq t_0$). Dalle

$$v(x, t) = R_{\mu_1}(x, t) + (R_{\mu_2}(x, t) - R_{\mu_1}(x, t)) + \cdots$$

[1] Cfr. questi Rendiconti, vol. XXI, 1° sem. 1912 a pag. 747.

valida senza eccezione per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$:

$$\frac{\partial v(x\,,\,t)}{\partial t} = S_{\mu_1}(x\,,\,t) + (S_{\mu_2}(x\,,\,t) - S_{\mu_1}(x\,,\,t)) + \cdots$$

valida per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$, esclusi, per ogni $t \geq t_0$, i valori di x corrispondenti ai punti di un insieme di misura nulla, discende senza altro:

$$\int_0^1 \Phi_m(x)\, v(x\,,\,t)\, dx = Q_m(t)\ , \qquad \int_0^1 \Phi_m(x) \frac{\partial v(x\,,\,t)}{\partial t}\, dx = Q'_m(t)$$

$$m = 1\,,\,2\,,\ldots$$

e quindi, successivamente

$$\int_0^1 [v(x\,,\,t)]^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n(t))^2 .$$

Risulta così dimostrato il seguente:

Teorema II. — *Date le funzioni $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$, ... normali ed ortogonali nell'intervallo* (01), *e le funzioni* $Q_1(t)$, $Q_2(t)$, ... *definite dalle formule* (13) *secondo quanto è stato indicato al n. 4, la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(x)\, Q_n(t)$$

converge assolutamente ed uniformemente per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$ verso una funzione $v(x\,,t)$ finita e continua, senza eccezione per $0 \leq x \leq 1$, $t_0 \leq t$, derivabile rispetto a t (la derivata essendo una funzione integrabile in senso di Lebesgue nel campo 01, *per $t \geq t_0$), per la quale si ha:*

$$\int_0^1 [v(x\,,\,t)]^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} (Q_n(t))^2 \qquad \int_0^1 \Phi_m(x)\, v(x\,,\,t)\, dx = Q_m(t)$$

$$\int_0^1 \Phi_m(x) \frac{\partial v(x\,,\,t)}{\partial t}\, dx = Q'_m(t)$$

$$m = 1\,,\,2\,,\ldots$$

Ci proponiamo di mostrare tra breve quale importante applicazione possa trarsi dal risultato così stabilito.