ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

recessivo, secondo i casi, essendo quel determinante esaltato o depresso; quindi si potrebbe avere:

$$\text{per l'uovo fecondato femmina: } (A\xi + X)\ (A\xi + 0)$$
$$\text{" \quad " \quad maschio: } (A\xi + x)\ (A\xi + x),$$

ponendo X pel determinante femminile esaltato (vale a dire, dominante); x pel determinante femminile depresso (vale a dire, più del solito recessivo).

Potrebbe supporsi che in altri organismi i determinanti sessuali avessero tutt'altra distribuzione nelle uova e negli spermii. Così è in fatti p. es. nei Pteropodi, dove vi è un eterocromosoma, soltanto in una metà degli spermii (l'altra metà degenera) e non nelle uova. Siccome i Pteropodi sono ermafroditi, non v'è determinazione di sesso [1]; la formola dell'uovo fecondato sarebbe allora:

$$(A\xi + 0)\ (A\xi + x).$$

Prevedo che mi si potrà obbiettare che, secondo la mia ipotesi, il determinante maschile non sarebbe antitetico col determinante femminile. Ma è presumibile che la condizione primitiva dei Metazoi sia stato l'ermafroditismo; questo è il mio convincimento. I Ctenofori e i Platodi, i quali sono lo stipite primitivo degli animali bilaterali, sono ermafroditi. Ora, nell'ermafroditismo, non vi è antagonismo tra maschio e femmina; quindi i determinanti maschili e femminili non sono antitetici.

Matematica. — *Estensione di alcuni precedenti risultati.* Nota del dott. LUIGI AMOROSO, presentata dal Corrispondente GIUSEPPE LAURICELLA [2].

In nostre precedenti Note abbiamo studiato l'equazione integrodifferenziale

$$u(x\,,t) + \int_0^1 \frac{\partial u(\xi\,,t)}{\partial t}\, H(\xi\,,x)\, d\xi = g(x\,,t) \tag{1}$$

con nucleo simmetrico $H(\xi\,,x)$. Ci proponiamo in questa Nota di accennare come la teoria ivi sviluppata possa estendersi al caso in cui il nucleo $H(\xi\,,x)$ non sia simmetrico, ed al caso in cui, invece di un'unica equazione, si abbia da considerare un sistema di equazioni.

[1] È dubbio se i Gasteropodi eutineuri siano ermafroditi primitivi, o se non siano invece discesi da antenati a sessi separati.

[2] Pervenuta all'Accademia il 19 settembre 1912.

A) Estensione al caso di un nucleo non simmetrico.

Sia $H(\xi , x)$ una funzione reale delle variabili reali ξ , x definita nel quadrato $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq x \leq 1$, che soddisfi alle seguenti proprietà:

I. Se $\varphi(\xi)$ è una funzione integrabile, insieme col suo quadrato, nell'intervallo 0 1, in senso di Lebesgue,

$$\int_0^1 \varphi(\xi)\, H(\xi , x)\, d\xi \quad , \quad \int_0^1 \varphi(\xi)\, H(x , \xi)\, d\xi$$

sieno funzioni di x finite e continue nell'intervallo 0 1; inoltre

$$\int_0^1 H(x , \xi)\, H(\xi , y)\, d\xi \ ,$$

risultino, per $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, funzioni continue, non identicamente nulle.

II. Se

$$\begin{array}{l} \lambda_1 \quad , \lambda_2 \quad , \ldots \lambda_n , \ldots \\ \Phi_1(x) , \Phi_2(x) , \ldots \Phi_n(x) , \ldots \\ \Psi_1(x) , \Psi_2(x) , \ldots \Psi_n(x) , \ldots \end{array}$$

costituiscono le serie complete dei valori eccezionali e delle funzioni biortogonali di (Goursat) del nucleo $H(\xi , x)$ in modo, che si abbia

$$\Psi_1(x) + \lambda_1 \int_0^1 \Psi_1(\xi)\, H(\xi , x)\, d\xi = 0$$

$$\Phi_1(x) + \lambda_1 \int_0^1 \Phi_1(\xi)\, H(x , \xi)\, d\xi = 0 \ , \quad \text{ecc.}$$

le costanti $\lambda_1 , \lambda_2 , \ldots \lambda_n , \ldots$ *sieno, tranne al più un numero finito di esse, negative.*

Sia poi, come nelle Note precedenti, $g(x , t)$ una funzione finita e continua colla derivata $\frac{\partial g}{\partial t}$ finita e continua nel campo $0 \leq x \leq 1$, $t \geq t_0$, t_0 essendo una costante assegnata.

Detto allora, secondo la definizione già data, che una funzione $u(x , t)$ è un integrale *regolare* della (1), se è finita e continua rispetto ad ambedue le variabili x , t per $0 \leq x \leq 1$, $t \geq t_0$, colla derivata $\frac{\partial u}{\partial t}$ integrabile parzialmente rispetto a x insieme col suo quadrato nell'intervallo 0 1, qualunque sia $t \geq t_0$, allora *la condizione necessaria e sufficiente perchè esista un integrale regolare della* (1), *che per* $t = t_0$ *assume i valori di una fun-*

zione data $h(x)$ (finita e continua) è che sia risolubile l'equazione integrale di prima specie

$$\int_0^1 \theta(\xi)\, \mathrm{H}(\xi, x)\, d\xi = g(x, t_0) - h(x),$$

$\theta(\xi)$ essendo una funzione integrabile nel campo 01, insieme col suo quadrato, in senso di Lebesgue.

Tale integrale è unico: esso è rappresentato da una serie procedente per le $\Psi_n(x)$. Nell'ipotesi che le λ_n sieno tutte radici semplici, si ha precisamente

$$u(x, t) = g(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} \Psi_n(x) \left\{ \mathrm{A}_n e^{\lambda_n(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \mathrm{B}_n(\tau)\, e^{\lambda_n(t-\tau)}\, dt \right\}$$

$$\mathrm{A}_n = \int_0^1 \{ g(\xi, t_0) - h(\xi) \} \, \Phi_n(\xi)\, d\xi$$

$$\mathrm{B}_n(t) = \int_0^1 \frac{\partial g(\xi, t)}{\partial t} \Phi_n(\xi)\, d\xi,$$

(serie convergente assolutamente e conformemente rispetto alle variabili x, t per $0 \leq x \leq 1$, $t \geq t_0$).

B) Estensione al caso di un sistema di m equazioni in n variabili.

Sia dato sullo spazio infinito a n dimensioni, rappresentato dalle variabili $x_1, \ldots x_n$, un campo continuo e finito S ad n dimensioni; e diciamo indifferentemente $\xi_1, \ldots \xi_n$, ovvero $x_1, \ldots x_n$, le coordinate di un punto generico interno ad S, che eventualmente può coincidere con un punto del contorno di S. Sieno

$$\text{(3)} \qquad \mathrm{H}_{rs}(\xi_1, \ldots \xi_n | x_1, \ldots x_n) \qquad r, s = 1, 2, \ldots n$$

m^2 funzioni reali di una coppia di punti entro S, le quali soddisfino alle seguenti proprietà:

I. Se $\varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)$ è una funzione integrabile, insieme col suo quadrato, in senso di Lebesgue, nel campo S, le funzioni

$$\int_S \varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)\, \mathrm{H}_{rs}(\xi_1, \ldots \xi_n | x_1, \ldots x_n)\, d\xi_1, \ldots d\xi_n,$$

$$\int_S \varphi(\xi_1, \ldots \xi_n)\, \mathrm{H}_{rs}(x_1, \ldots x_n | \xi_1, \ldots \xi_n)\, d\xi_1, \ldots d\xi_n$$

$$r, s = 1, 2, \ldots m$$

costituiscano, entro S, funzioni finite e continue; inoltre

$$\int_S \mathrm{H}_{rs}(x_1, \dots x_n|_1, \xi \dots \xi_n)\, \mathrm{H}_{rs}(\xi_1, \dots \xi_n|y_1, \dots y_n)\, d\xi_1, \dots d\xi_n,$$

$$r, s = 1, 2, \dots m$$

risultino pure entro funzioni continue di una coppia di punti in S, non tutte identicamente nulle.

II. Se

$$\lambda_1 \quad , \lambda_2 \quad \lambda_h \quad , \dots$$

$$\Phi_{r1}(x_1, \dots x_n), \Phi_{r2}(x_1, \dots x_n), \dots \Phi_{rh}(x_1, \dots x_n), \dots$$

$$\Psi_{r1}(x_1, \dots x_n), \Psi_{r2}(x_1, \dots x_n), \dots \Psi_{rh}(x_1, \dots x_n), \dots$$

$$r = 1, 2, \dots m$$

$$h = 1, 2, \dots$$

costituiscono la serie completa dei valori eccezionali e delle funzioni biortogonali del sistema dei nuclei (3), in modo che si abbia

$$\Psi_{s1}(x_1, \dots x_n) + \\ + \lambda_1 \sum_{r=1}^{m} \int_S \Psi_{r1}(\xi_1, \dots \xi_n)\, \mathrm{H}_{rs}(\xi_1, \dots \xi_n|x_1, \dots x_n)\, d\xi_1, \dots d\xi_n = 0,$$

$$\Phi_{s1}(x_1, \dots x_n) + \\ + \lambda_1 \sum_{r=1}^{\infty} \int_S \Phi_{r1}(\xi_1, \dots \xi_n)\, \mathrm{H}_{rs}(x_1, \dots x_n|\xi_1, \dots \xi_n)\, d\xi_1, \dots d\xi_n = 0, \text{ ecc.,}$$

$$s = 1, 2, \dots m,$$

le costanti $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ *sieno, tranne al più un numero finito di esse, negative.*

Sieno poi $g_s(x_1 \dots x_n|t)$, $s = 1, 2, \dots m$, funzioni reali delle variabili reali $x_1, \dots x_n, t$, definite nel campo S, per $t \geq t_0$ (t_0 essendo un numero dato), finite e continue colle derivate $\frac{\partial g_s}{\partial t}$ finite e continue, senza eccezione entro S, per $t \geq t_0$.

Consideriamo allora il sistema

$$\text{(4)} \qquad u_s(x_1, \dots x_n, t) + \\ + \sum_{r=1}^{m} \int_S \frac{\partial u_r(\xi_1, \dots \xi_n|t)}{\partial t}\, \mathrm{H}_{rs}(\xi_1, \dots \xi_n|x, \dots x_n)\, d\xi_1, \dots d\xi_n = g_s(x_1, \dots x_n|t)$$

$$s = 1, 2, \dots m.$$

Si dirà che m funzioni
$$u_s(x_1, x_2, \ldots x_n | t) \qquad s = 1, 2, \ldots m$$
costituiscono un sistema di integrali *regolari* di esso, se verificano la (4); ed inoltre sono funzioni finite e continue entro S per $t \geq t_0$, con le derivate $\frac{\partial u_s}{\partial t}$ integrabili parzialmente rispetto a $x_1, \ldots x_n$, insieme coi loro quadrati, entro S, in senso di Lebesgue, qualunque sia $t \geq t_0$.

Si ha, allora (e la dimostrazione si riduce in sostanza al caso di una unica equazione con lo stesso metodo con cui un sistema di equazioni di Fredholm si riduce ad unica equazione di Fredholm), che *la condizione necessaria e sufficiente, perchè esista un sistema di integrali regolari del sistema* (4), *che per* $t = t_0$ *si riducano ad* m *funzioni assegnate dei punti di* S
$$h_s(x_1, \ldots x_n) \qquad s = 1, 2, \ldots m$$
(*finite e continue*), *è che sia risolubile il sistema integrale di prima specie*
$$\sum_{r=1}^{m} \int_S \theta_r(\xi_1, \ldots \xi_n)\, H_{rs}(\xi_1, \ldots \xi_n | x_1, \ldots x_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n = $$
$$= g_s(x_1, \ldots x_n | t_0) - h_s(x_1, \ldots x_n) \qquad s = 1, 2, \ldots m,$$
le $\theta_r(\xi_1, \ldots \xi_n)$ *essendo integrabili entro* S, *insieme coi loro quadrati, in senso di Lebesgue.*

Tale sistema di integrali è unico, ed è rappresentato da serie procedenti per le funzioni $\psi_n(x)$ *convergenti assolutamente e conformemente rispetto alle* $x_1, \ldots x_n, t$, *entro tutto* S, *per* $t \geq t_0$.

Matematica. — *Sulla totalità dei numeri primi inferiori ad un limite assegnato.* Nota di G. Andreoli, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. I diversi indirizzi seguiti per la ricerca della totalità dei numeri primi, si trovano ampiamente trattati e discussi nella monografia del Torelli [2] e nel manuale del Landau [3]. Essi si possono classificare secondo quattro idee fondamentali:

1ª) Enumerazione, eseguita materialmente col « Crivello d' Eratostene ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1912.
[2] *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato.* Napoli (1901).
[3] *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.*