ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Si dirà che m funzioni

$$u_s(x_1, x_2, \dots x_n | t) \qquad s = 1, 2, \dots m$$

costituiscono un sistema di integrali *regolari* di esso, se verificano la (4); ed inoltre sono funzioni finite e continue entro S per $t \geq t_0$, con le derivate $\dfrac{\partial u_s}{\partial t}$ integrabili parzialmente rispetto a $x_1, \dots x_n$, insieme coi loro quadrati, entro S, in senso di Lebesgue, qualunque sia $t \geq t_0$.

Si ha, allora (e la dimostrazione si riduce in sostanza al caso di una unica equazione con lo stesso metodo con cui un sistema di equazioni di Fredholm si riduce ad unica equazione di Fredholm), che *la condizione necessaria e sufficiente, perchè esista un sistema di integrali regolari del sistema* (4), *che per* $t = t_0$ *si riducano ad* m *funzioni assegnate dei punti di* S

$$h_s(x_1, \dots x_n) \qquad s = 1, 2, \dots m$$

(*finite e continue*), *è che sia risolubile il sistema integrale di prima specie*

$$\sum_{r=1}^{m} \int_S \theta_r(\xi_1, \dots \xi_n)\, \mathrm{H}_{rs}(\xi_1, \dots \xi_n | x_1, \dots x_n)\, d\xi_1, \dots d\xi_n =$$
$$= g_s(x_1, \dots x_n | t_0) - h_s(x_1, \dots x_n) \qquad s = 1, 2, \dots m,$$

le $\theta_r(\xi_1, \dots \xi_n)$ *essendo integrabili entro* S, *insieme coi loro quadrati, in senso di Lebesgue.*

Tale sistema di integrali è unico, ed è rappresentato da serie procedenti per le funzioni $\psi_n(x)$ *convergenti assolutamente e conformemente rispetto alle* $x_1, \dots x_n, t$, *entro tutto* S, *per* $t \geq t_0$.

Matematica. — *Sulla totalità dei numeri primi inferiori ad un limite assegnato.* Nota di G. Andreoli, presentata dal Socio T. Levi-Civita [1].

1. I diversi indirizzi seguiti per la ricerca della totalità dei numeri primi, si trovano ampiamente trattati e discussi nella monografia del Torelli [2] e nel manuale del Landau [3]. Essi si possono classificare secondo quattro idee fondamentali:

1ª) Enumerazione, eseguita materialmente col « Crivello d'Eratostene ».

[1] Pervenuta all'Accademia il 10 settembre 1912.

[2] *Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato.* Napoli (1901).

[3] *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen.*

2ª) L'uso d'un metodo — quasi di ricorrenza — che permetta, conosciuti certi elementi, di calcolare tale totalità. Ad esempio le formole di Legendre, di Meissel ecc.

3ª) Porre in relazione i numeri primi con certe singolarità. In particolare si potranno assegnare « equazioni caratteristiche » cui soddisfano, fra i numeri reali (od i numeri interi), solo i primi. Ed a questo si riconnettono molti lavori: quello del prof. Levi-Civita, ad esempio (Acc. Lincei, vol. IV, 1° sem., fasc. VII, ser. 5ª, pag. 303).

4ª) Costruire una funzione continua che per valori interi della variabile sia legata alla totalità dei numeri primi inferiori a quei valori, da semplici relazione: ad esempio, che la sua parte intera sia tale totalità; oppure che il valore della funzione differisca da essa per quantità il cui rapporto alla funzione tende a zero.

A questa idea si riconnettono i lavori sulla distribuzione assintotica di cui ci occupò già genialmente il Cesàro, ed a cui è in massima parte dedicata l'opera poderosa del Landau. Esporremo in un'altra Nota una formola di questo tipo. In questa Nota daremo tre espressioni della totalità, basate sull'uso della serie di Lambert o del teorema di Wilson. La terza permette anche di dare le somme delle potenze α-sime dei numeri primi. Inoltre in questa terza formola si evitano del tutto le quantità complesse che le prime due formole rendono di sola apparenza.

2. Consideriamo la funzione:

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\Gamma(x)+1}{x}\,\pi\right)+\operatorname{sen}^2 \pi x=\Phi(x)\,. \tag{1}$$

Questa funzione, per x reale, si annulla solo se x sia un primo. Infatti, per x reale si ha che primo e secondo termine del primo membro sono essenzialmente positivi, epperò il minimo valore che $\Phi(x)$ può assumere è lo zero. Dunque si dovrà avere

$$\begin{cases}\operatorname{sen}\pi x=0\\ \operatorname{sen}\dfrac{\Gamma(x)+1}{x}=0\,.\end{cases}$$

La prima di queste due eguaglianze ci dice che x deve essere intero. Allora $\Gamma(x)$ diventa $(x-1)!$ E perchè sia soddisfatta anche la seconda, per il notissimo teorema di Wilson deve essere x primo. Dunque i soli punti zero reali della Φ sono i numeri primi. D'altra parte, la funzione Φ potrebbe avere singolarità solo nei punti in cui l'uno e l'altro, o ambedue i termini che la compongono, l'avessero. Ora il secondo termine ha per sola singolarità (essenziale) l'infinito; il primo, considerato come funzione di

$$\frac{\Gamma(x)+1}{x}=z\,,$$

li presenta solo per $z = \infty$. Ma z diventa infinito oppure ha una singolarità essenziale solo per

$$x = 0\,;$$
$$x = -1\,;\ldots$$

Dunque possiamo asserire che nessun punto del semiasse reale positivo è di singolarità per la Φ. Epperò, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)}\,dx$$

esteso ad un contorno che giri, distandone per una quantità sufficientemente piccola, intorno al segmento dell'asse reale compreso fra 1 ed n, ci darà la totalità dei numeri primi inferiori ad n. Tale contorno lo diremo « taglio ».

Lo stesso si poteva ripetere per la funzione

$$\Psi(x) = \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{x} + \operatorname{sen}^2 \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \right\} x\pi\,,$$

la quale presenta come punti-zero reale gl' inversi dei numeri primi, e come punto di singolarità essenziale, nel segmento $(s\,,1)$, il punto 0. In tal caso l'integrazione va estesa al taglio $\left(1\,,\frac{1}{n}\right)$.

3. Passiamo a dare la 3ª espressione, che si potrebbe forse usare per averne formole assintotiche.

È chiaro che la funzione

$$\frac{\operatorname{sen} \pi x}{\pi x}\,,$$

per x intero diverso da zero, è nulla; per x tendente a zero, tende ad 1. D'altra parte, se $\theta(n)$ è il numero dei divisori di n, e:

$$\Lambda(x) = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots$$

è la serie di Lambert, si ha:

$$\left(\frac{\Lambda^{(n)}(x)}{\underline{|n}}\right)_{x=0} = \theta(n)\,.$$

Ora, $\theta(n) \gtreqless 2$, secondochè n non sia o sia primo. Dunque l'intero

$$\left(\frac{\Lambda^{(n)}(x)}{\underline{|n}} - 2\right)_{x=0}$$

è eguale o maggiore di zero secondo che n sia o no primo. Dunque avremo che

$$\frac{\operatorname{sen}\pi\left(\frac{\mathcal{A}^{(n)}(x)}{\lfloor n}-2\right)}{\pi\left(\frac{\mathcal{A}^{(n)}(x)}{\lfloor n}-2\right)}=\mathrm{A}(x\,,n),$$

per x tendente a zero, tende ad 1 o 0, secondo che n sia primo oppur no. Epperò possiamo asserire che la funzione

$$\Pi(x\,,m)=\sum_1^m{}_n\,\mathrm{A}(x\,,n),$$

per x tendente a zero, tende a dare la totalità dei primi minori di n; ovvero, per x sufficientemente piccolo, la sua parte intera rappresenta tale numero. Lo stesso si poteva ripetere se si poneva

$$\mathrm{A}(x\,,n)=\mathcal{A}_n^{(n)}(x)\,,$$

ove $\mathcal{A}_n$ è la somma dei primi n termini di $\mathcal{A}(x)$.

Infine si vede che la funzione

$$\Pi_\alpha(x\,,m)=\sum_1^m{}_n\,\mathrm{A}(x\,,n)\,.\,\frac{1}{n^\alpha}\,,$$

per x tendente a zero, tende a dare la somma delle potenze α-sime dei primi inferiori ad n

Fisica-matematica. — *I corpi di attrazione nulla.* Nota di Umberto Crudeli, presentata dal Socio Pizzetti (¹).

La ricerca dei corpi di attrazione (newtoniana) nulla (privi di distribuzioni di densità superficiali) di cui è ben conosciuta l'importanza, fu abbordata, per la prima volta, in modo sistematico, dal prof. Pizzetti (²). Egli, a pag. 240 della sua citata Memoria degli Annali, dopo avere notato che la ricerca dei corpi di attrazione nulla, relativi ad uno spazio τ, può ridursi alla ricerca di tutte quelle funzioni f che, entro τ e sul contorno, godono di certe condizioni di regolarità e sul contorno, inoltre, godono delle proprietà $f=0$ e $\frac{\partial f}{\partial n}=0$, osserva:

« Poniamo, in particolare, che la superficie S che limita lo spazio τ, occupato dal corpo, sia un ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$

(¹) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1912.

(²) Rend. R. Accad. dei Lincei, XVIII, 1° sem., fasc. 5°; Annali di Matematica, XVII, serie III, pag. 225.