ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

è eguale o maggiore di zero secondo che n sia o no primo. Dunque avremo che

$$\frac{\operatorname{sen} \pi \left(\frac{\varDelta^{(n)}(x)}{\lfloor n} - 2 \right)}{\pi \left(\frac{\varDelta^{(n)}(x)}{\lfloor n} - 2 \right)} = \mathrm{A}(x \,, n),$$

per x tendente a zero, tende ad 1 o 0, secondo che n sia primo oppur no. Epperò possiamo asserire che la funzione

$$\Pi(x \,, m) = \sum_1^m {}_n \, \mathrm{A}(x \,, n),$$

per x tendente a zero, tende a dare la totalità dei primi minori di n; ovvero, per x sufficientemente piccolo, la sua parte intera rappresenta tale numero. Lo stesso si poteva ripetere se si poneva

$$\mathrm{A}(x \,, n) = \varDelta_n^{(n)}(x) \,,$$

ove $\varDelta_n$ è la somma dei primi n termini di $\varDelta(x)$.

Infine si vede che la funzione

$$\Pi_\alpha(x \,, m) = \sum_1^m {}_n \, \mathrm{A}(x \,, n) \,.\, \frac{1}{n^\alpha} \,,$$

per x tendente a zero, tende a dare la somma delle potenze α-sime dei primi inferiori ad n

Fisica-matematica. — *I corpi di attrazione nulla.* Nota di Umberto Crudeli, presentata dal Socio Pizzetti [1].

La ricerca dei corpi di attrazione (newtoniana) nulla (privi di distribuzioni di densità superficiali) di cui è ben conosciuta l'importanza, fu abbordata, per la prima volta, in modo sistematico, dal prof. Pizzetti [2]. Egli, a pag. 240 della sua citata Memoria degli Annali, dopo avere notato che la ricerca dei corpi di attrazione nulla, relativi ad uno spazio τ, può ridursi alla ricerca di tutte quelle funzioni f che, entro τ e sul contorno, godono di certe condizioni di regolarità e sul contorno, inoltre, godono delle proprietà $f = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, osserva:

« Poniamo, in particolare, che la superficie S che limita lo spazio τ, occupato dal corpo, sia un ellissoide di equazione

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \,.$$

(1) Pervenuta all'Accademia il 19 agosto 1912.

(2) Rend. R. Accad. dei Lincei, XVIII, 1° sem., fasc. 5°; Annali di Matematica, XVII, serie III, pag. 225.

Si ponga

$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 2k(x, y, z)$$

ed

$$f(x, y, z) = k^2 . \varphi(x, y, z),$$

dove $\varphi(x, y, z)$ sia una funzione che sulla superficie e nell'interno dell'ellissoide goda di certe condizioni di regolarità. Allora la densità del corpo nel punto (x, y, z) sarà

$$h = \Delta^2 f = 2(\mathrm{D}^2 - k\mathrm{A})\, \varphi - 4k\Sigma \frac{x}{a^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k\Delta^2 \varphi ,$$

essendo

$$\mathrm{D}^2 = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}, \quad \mathrm{A} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \text{ ».}$$

Noi, qui, inspirandoci a tale considerazione, intenderemo [*condizioni che verranno indicate con* (α)] che $s(x, y, z) = 0$ (equazione che, in particolare, potrà essere quella di un ellissoide) definisca il contorno S dello spazio τ, e che $s(x, y, z)$ sia una funzione, monodroma, limitata nel campo τ (campo, per ipotesi, tutto situato al finito), la quale sia diversa da zero in ogni punto interno di τ, e nel campo stesso ammetta le derivate prime e seconde limitate. Inoltre porremo identicamente

$$u(x, y, z)\, s^2(x, y, z) = f(x, y, z), \tag{1}$$

dove $u(x, y, z)$ sia [*condizioni che indicheremo con* (β)] una funzione, monodroma e tale che la $f(x, y, z)$ soddisfi alle seguenti condizioni:

I) di avere il $\Delta^2 f$ limitato ed integrabile in τ;

II) di far resultare valide, tenendo presente la (1), le formule

$$\int_\tau g\Delta^2 f\, d\tau = \int_\tau f \Delta^2 g\, d\tau$$

ed

$$\int_\tau \frac{\Delta^2 f}{r}\, d\tau = 0,$$

dove, nella prima, g rappresenti una funzione limitata e continua in τ, e, nella seconda,

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2},$$

intendendo che (x_1, y_1, z_1) sia un qualsiasi *punto esterno* ad S;

III) di far resultare applicabile al $\Delta^2 f$ la nota formula del Poisson

$$-4\pi\Delta^2 f(x, y, z) = \Delta^2 \int_\tau \frac{\Delta^2 f(\xi, \eta, \zeta)}{r}\, d\tau ,$$

nella quale

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$

dove (x, y, z) rappresenta un qualsiasi *punto interno* ad S.

Ciò premesso, $\Delta^2 f = \Delta^2(u s^2)$ *rappresenta la più generale densità* ϱ *limitata ed integrabile, per la quale, inoltre, valga la formula del Poisson e sia nulla la corrispondente azione esterna del corpo limitato dalla superficie considerata.*

Che $\Delta^2 f$ corrisponda ad una distribuzione di densità, per la quale la azione esterna del corpo resulta nulla, si vede immediatamente, ricorrendo alla nota formula del Green, relativa ad un punto esterno qualsiasi, la quale, tenendo presenti le condizioni (β), porge

$$\int_\tau \frac{\Delta^2 f}{r}\, d\tau = 0$$

in ogni punto esterno.

E che una qualsiasi densità ϱ, limitata ed integrabile, per la quale, inoltre, valga la formula dei Poisson e sia nulla la corrispondente azione esterna del corpo, possa mettersi sotto la forma suddetta, resulta da quanto segue: Si ponga, *nell'interno del campo* τ, identicamente,

(2)
$$\frac{V}{s^2} = -4\pi u,$$

dove

$$V = \int_\tau \frac{\varrho}{r}\, d\tau.$$

Per cui, intanto, nell'interno stesso,

(3)
$$V = -4\pi u s^2.$$

Col tendere del punto interno verso il contorno, V tende, per ipotesi, allo zero; quindi anche $-4\pi u s^2$ tenderà verso lo zero. Sicchè, assumendo come valori di u nell'interno i valori dati dalla (2), e come valori della u sul contorno dei valori finiti qualsiasi, ed assumendo nulle la u e la s all'esterno di τ, la (3) varrà in tutto lo spazio. Dunque

$$-4\pi u s^2 = \int_\tau \frac{\varrho\, d\tau}{r}.$$

E quindi

(4)
$$\varrho = \Delta^2(u s^2).$$

La (1) ci mostra pure quel che vi è di arbitrario nella questione. E, poichè il ragionamento fatto per dimostrare la generalità della (4) non dipende dalla scelta della s [purchè soddisfacente alle condizioni (α)], noi potremo intendere fissata una certa s — purchè, naturalmente, soddisfacente alle condizioni (α) — e quindi intendere che *l'arbitrarietà nella questione sia portata tutta dalla* $u(x, y, z)$, la quale è soltanto legata dalle condizioni (β) [1].

Ora, indicando con ϱ_1 la densità di *una* distribuzione corrispondente ad un'assegnata azione esterna non nulla, avremo che

$$\varrho_1 + \Delta^2(us^2)$$

rappresenterà, con le restrizioni poste, *la più generale densità di una distribuzione corrispondente all'assegnata azione esterna.* Come si vede, per assegnare tale densità occorre conoscere una particolare distribuzione corrispondente all'azione esterna considerata.

Recentemente, il prof. Lauricella [2] ha mostrato, per altra via, ma sotto restrizioni diverse dalle nostre, il grado di indeterminazione della densità del corpo e la forma più generale della funzione potenziale. Il metodo del prof. Lauricella richiede, però, l'esistenza del $\Delta^2\varrho$ (nel quale, appunto, com'egli ha stabilito, consiste allora l'arbitrarietà della ϱ), mentre *noi non abbiamo escluso densità non derivabili.*

Col metodo del prof. Lauricella, volendo assegnare la più generale funzione potenziale, corrispondente ad una data azione esterna, occorre conoscere (anzichè una particolare distribuzione) la funzione G_2 del Green.

Successivamente, il prof. Lauricella ha mostrato quale contributo totale può dare, sulla determinazione della densità nell'interno dei pianeti, la conoscenza dell'azione esterna del pianeta e del suo moto rigido intorno al baricentro [3]. Rispetto a tale ulteriore problema, noi, appoggiandoci ai resultati precedenti, possiamo stabilire quanto segue:

Anzitutto, avendo dimostrato il prof. Pizzetti che corpi di massa non nulla corrispondenti ad una medesima azione esterna, hanno lo stesso centro di massa e gli stessi assi principali centrali d'inerzia, noi potremo, nella nostra ricerca, assumere tali assi come assi di riferimento. Come osserva il prof. Lauricella, essendo note, in virtù di un altro teorema del prof. Pizzetti, le differenze fra i momenti principali d'inerzia del pianeta, qualora sia nota la sua azione esterna, e supponendosi ora, inoltre, noto il movimento rigido del pianeta stesso attorno al suo baricentro, resulteranno determinati, facendo uso delle equazioni di Eulero, i suddetti momenti d'inerzia A, B, C,

[1] La posizione $f = us^2$ permette di assegnare effettivamente una estesa classe di funzioni f soddisfacenti alle condizioni volute.

[2] Rend. R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1911, pag. 100.

[3] Rend. R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1912, pag. 26.

escludendo il caso in cui tutti i minori del 2° ordine del determinante dei coefficienti di A, B, C, nelle equazioni di Eulero, siano nulli; in cui, cioè, la velocità angolare sia di grandezza costante ed il suo asse di orientazione fissa. Dei suddetti momenti d'inerzia, basterà tener conto, per il nostro scopo, di uno soltanto (per es., di A), giacchè gli altri due potranno ottenersi mediante le suddette differenze. Sicchè, intendendo conosciuta la densità ϱ_1 di una particolare distribuzione corrispondente alla suddetta azione esterna, avremo

$$\mathrm{A}=\int_\tau \varrho\xi^2\,d\tau=\int_\tau \varrho_1\xi^2\,d\tau+\int_\tau \xi^2\Delta^2(us^2)\,d\tau .$$

Ovvero, ponendo

$$\mathrm{A}-\int_\tau \varrho_1\xi^2\,d\tau=\mu$$

e tenendo presenti le condizioni (β), avremo

$$\mu=\int_\tau \xi^2\Delta^2(us^2)\,d\tau=\int_\tau us^2\Delta^2(\xi^2)\,d\tau=2\int_\tau us^2\,d\tau .$$

Dunque, ponendo $\lambda=\frac{\mu}{2}$, si ha

$$\lambda=\int_\tau us^2\,d\tau \tag{5}$$

La (5) rientra in un tipo di equazioni, trattato nel caso generale, dal prof. Lauricella (¹). La soluzione generale della (5) è

$$u=v+\frac{s^2}{\int_\tau s^4\,d\tau}\left\{\lambda-\int_\tau vs^2\,d\tau\right\}, \tag{6}$$

dove la v rappresenta, per noi, una funzione soggetta alle stesse restrizioni imposte alla u, e, del resto, arbitraria. Quindi, *la più generale espressione della densità (limitata ed integrabile, per la quale, inoltre, sia valido il teorema del Poisson) corrispondente alla data azione esterna e al dato moto rigido del pianeta intorno al suo baricentro, si otterrà sostituendo l'espressione* (6) *nella* $\varrho_1+\Delta^2(us^2)$. *E si ottiene, così,*

$$\varrho=\varrho_1+\Delta^2(vs^2)+\frac{\Delta^2(s^4)}{\int_\tau s^4\,d\tau}\left\{\lambda-\int_\tau vs^4\,d\tau\right\}.$$

(¹) Rend. R. Accad. dei Lincei, 1° sem. 1912, pag. 18