ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Meccanica. — *Sui problemi della elasticità ereditaria.* Nota dell' ing. GIOVANNI GIORGI, presentata dal Corrisp. A. DI LEGGE [1].

1. Notizie preliminari. — I recenti lavori del prof. Volterra [2] hanno messo in tale evidenza lo studio dei problemi di elasticità ereditaria, che, prendendo a trattare di questo argomento, credo non dovermi trattenere su considerazioni di carattere generale. Fenomeni di elasticità residua erano stati considerati col nome di *Nachwirkung* per opera del Boltzmann (dal 1874 in poi), indi dal Wiechert; e gli autori francesi li hanno indicati col nome di *traînage*. Si è veduto che tutti i corpi presentano di questi fenomeni, e che per uno studio completo della meccanica dei corpi elastici non è possibile prescinderne; ma soltanto la difficoltà matematica aveva impedito di tenerne conto: il loro intervento trasforma le equazioni differenziali della elasticità in equazioni integro-differenziali, dove i dati arbitrarî sono funzioni del tempo, che influiscono pel complesso di tutti i valori passati, da epoche remote in poi. Il metodo generale di risoluzione di tali equazioni è stato dato solamente dal prof. Volterra, il quale nelle sue classiche Memorie ha fondato la teoria matematica completa dei fenomeni elastici ereditarî; e in particolare, dopo aver dato le equazioni generali per l'equilibrio e aver mostrato come si trasformano, ha risoluto i problemi relativi alla sfera, e ultimamente ha trattato il difficile problema delle vibrazioni ereditarie di una corda e di una sbarra rigida; quest'ultimo, suggerito dal Webster.

Riprendendo per altra via lo studio di questi problemi, mi propongo in questa Nota, e in qualche altra successiva, di additare un metodo di trattazione che conduce a risultati in forma assai differente. Esso metodo si fonda sul calcolo degli operatori simbolici della forma $f\left(\frac{d}{dt}\right)$, di cui ho esposto le regole in altri miei lavori [3]. Applicandolo, e tenendo debito conto che nei sistemi fisici usualmente considerati è verificata sempre la condizione d'invariabilità delle leggi ereditarie, mostrerò come si ottengono le soluzioni sotto forma particolarmente semplice, cioè mediante termini che

[1] Pervenuta all'Accademia il 16 settembre 1912.

[2] Vedi particolarmente: *Sulle equazioni integro-differenziali dell'elasticità*, Rendiconti Lincei, 7 novembre 1909; e successive Note sullo stesso argomento; indi le *Conferenze* di Parigi del 1912.

[3] *Sul metodo simbolico* ecc., Atti dell'Ass. Elettr. ital., vol. VIII (1904), pp. 65-143; *Sul calcolo delle soluzioni funzionali* ecc., ibid., vol. IX (1905), pp. 651-699; e nei richiami ulteriori mi riferirò a questo secondo lavoro.

contengono, al più, solamente tre quadrature, invece che per mezzo di serie infinite di integrali di ordine illimitatamente crescente. Questo fatto può riuscire di qualche interesse anche analiticamente, perchè sembra additare come l'ipotesi della invariabilità, conducendo a un gruppo di operatori funzionali commutabili con la derivazione, riduca la natura matematica del problema, in modo da renderlo risolubile con operazioni, per così dire, di un grado di trascendenza meno elevato. Inoltre esso permette alcune generalizzazioni; p. es., togliere l'ipotesi che la funzione coefficiente della eredità sia finita e limitata e che si annulli del tutto al di là di un'epoca finita. Tale ipotesi restrittiva, che si introduce ordinariamente per ridurre gli integrali improprî a integrali proprî approssimativamente equivalenti, appare, almeno in parte, contraria all'esperienza; l'abbandonarla permette di discutere su basi precise il grado di incertezza che essa altrimenti ingenera nei risultati.

La presente Nota sarà dedicata all'esposizione del metodo e all'enunciazione della regola generale per la risoluzione dei problemi di equilibrio. Nelle successive discuterò l'andamento dei calcoli più in particolare, mostrando come il problema si connetta a quello delle trasformazioni di Laplace e a quello dei prolungamenti analitici delle serie di Taylor; e proseguirò con l'applicazione ai problemi dinamici, includendo come casi particolari anche quelli non ereditarî; darò poi alcune formole per la calcolazione numerica effettiva dei risultati; e mostrerò infine i rapporti e le differenze col problema più generale della eredità non invariabile.

2. Legge della elasticità ereditaria. — Nel caso di elasticità ordinaria, non ereditaria, la relazione tra forza F ed elongazione u è data, nei limiti della legge di Hooke [1], da

$$u = h^2 F \quad \text{ovvero} \quad F = k^2 u, \tag{1}$$

con h^2, ovvero k^2, coefficiente positivo. E le equazioni generali di equilibrio di corpi estesi nello spazio, isotropi o no, contengono sommatorie di termini della forma (1), dove le F sono componenti della sollecitazione (*stress*), le u sono componenti della deformazione (*strain*). Queste leggi valgono per deformazioni permanenti, dovute a forze che abbiano agito da lungo tempo; oppure per deformazioni iniziali (ma con altri valori di h, k). Altrimenti sono soltanto approssimate, perchè all'effetto iniziale si sovrappone un effetto residuo o ereditario, funzione del tempo. Volendo tener conto di questo ef-

[1] La validità precisa della legge di Hooke, almeno per certi corpi e per deformazioni piccole, è stata stabilita di recente con esperienze ottiche molto accurate, fondate sopra i calcoli del Volterra, ed eseguite dal prof. O. M. Corbino, il quale ne ha reso conto nella sua Nota: *Le tensioni create in un corpo elastico* ecc., Rendiconti Lincei, 1909, tom. 18, pp. 437-444.

fetto, e supponendo anch'esso lineare (legge di Hooke generalizzata dal Volterra), si deve a secondo membro delle (1) aggiungere un termine integrale che esprima l'insieme degli effetti residui lasciati dalle forze, o rispettivamente dalle deformazioni che il corpo ha avuto nei tempi τ passati, da $\tau = -\infty$ fino all'epoca presente $\tau = t$. La legge (1) è sostituita allora dalla seguente:

$$u(t) = h^2 \mathrm{F}(t) + \int_{-\infty}^{t} \mathrm{H}(t, \tau)\, \mathrm{F}(\tau)\, d\tau \tag{2A}$$

$$(hk = 1)$$

$$\mathrm{F}(t) = k^2 u(t) - \int_{-\infty}^{t} \mathrm{K}(t, \tau)\, u(\tau)\, d\tau, \tag{2B}$$

dove i nuclei H, K sono funzioni positive, e coniugate nel senso che la risoluzione della (2A) conduce alla (2B), e reciprocamente. Nei calcoli, si può far uso tanto dell'una quanto dell'altra di queste due equazioni equivalenti. Per passare da equazioni non ereditarie a equazioni ereditarie, si deve, a ogni coefficiente h^2 che moltiplichi una forza, sostituire l'operazione funzionale rappresentata dal secondo membro della (2A), ovvero, a ogni coefficiente k^2 che moltiplichi una deformazione, sostituire l'analoga operazione che sta a secondo membro della (2B).

Le proprietà ereditarie del corpo elastico sono espresse dalle funzioni H, K. Se il corpo si suppone di proprietà comunque variabili in funzione del tempo, le H, K possono contenere la τ in modo qualunque. Ma nella generalità dei casi pratici immaginabili dal fisico, si ha a che fare con corpi che mantengono inalterata la loro costituzione e le loro proprietà specifiche attraverso il tempo, almeno durante il corso delle esperienze. Allora è soddisfatta la condizione addizionale a cui ho fatto allusione sotto il nome di « invariabilità delle leggi ereditarie » [1]. Sperimentando su un diapason, ammettere questa legge significa soltanto ammettere che il metallo non si ossidi, o non perda la tempera, o non si vada raffreddando rapidamente mentre vibra. Questo esempio, e la riflessione che l'ipotesi dell'invariabilità semplifica grandemente i calcoli, ci inducono a ritenerla verificata fino da principio.

In tal caso, le funzioni $\mathrm{H}(t, \tau)$ e $\mathrm{K}(t, \tau)$ vengono a contenere le variabili t, τ solamente per differenza. Posto allora $\theta = t - \tau$, e quindi $\mathrm{H}(t, \tau) = \varphi(\theta)$, e $\mathrm{K}(t, \tau) = \psi(\theta)$, le leggi ereditarie si esprimono in questo modo caratteristico:

$$\begin{aligned} u(t) &= h^2 \mathrm{F}(t) + \int_0^{\infty} \varphi(\theta)\, \mathrm{F}(t - \theta)\, d\theta \\ \mathrm{F}(t) &= k^2 u(t) - \int_0^{\infty} \psi(\theta)\, u(t - \theta)\, d\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

[1] La quale fa sì che gli operatori funzionali divengono del tipo che io ho chiamato *normali* [Note citate a pag. 412 (3)]; tipo del *ciclo chiuso*, secondo il Volterra.

e il significato fisico di queste formole, come pure quello dei coefficienti $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta)$, è senza difficoltà, evidente.

3. Forma effettiva delle funzioni coefficienti. — Per determinare sperimentalmente la forma di $\varphi(\theta)$, si applichi una forza $F_0(t)$ della forma che altra volta ho indicato con $1(t)$, e cioè che sia nulla per valori negativi di t, e uguale a uno per valori positivi di t. La relativa elongazione $u_0(t)$ è allora uguale a

$$u_0(t) = h^2 + \int_0^t \varphi(\theta)\, d\theta$$

(per $t > 0$). Questa $u_0(t)$, osservata sperimentalmente, ha la forma rappresentata nel primo diagramma della fig. 1; cioè comincia con una ordinata

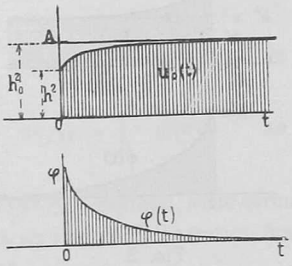

Fig. 1.

iniziale positiva h^2, e cresce poi per tendere asintoticamente a un valor limite $h_0^2 > h^2$. Derivando, si ricava la funzione φ; ed è rappresentata dal secondo diagramma della stessa figura: è una funzione positiva che dall'origine in poi decresce estinguendosi asintoticamente, e con legge tale che il suo integrale $\int_0^\infty \varphi(\theta)\, d\theta$ è convergente, e uguale alla differenza $h_0^2 - h^2$. Le esperienze lasciano incerto se la tangente iniziale della $u_0(t)$ sia verticale od obliqua, e quindi se la ordinata iniziale della $\varphi(t)$ sia finita o infinita [1]. A prima giunta, questo sembra un elemento d'incertezza grave, ma, se l'esperienza non decide, è segno che l'elemento incerto non porta molta conseguenza; e, analiticamente, il fatto che φ deve comparire nei calcoli sotto il segno integrale e come coefficiente di funzione finita, lascia presumere che la sostituzione di una φ limitata a una φ inizialmente illimitata ma ad integrale convergente, non modifichi molto i risultati. È lo stesso

[1] Alcune esperienze di Kohlrausch e di altri, sui filamenti di vetro e di argento, darebbero curve $\varphi(t)$ di andamento prima crescente e poi decrescente, anzichè monotòne; e quindi ordinata iniziale finita. Ma sono esperienze affètte da molta incertezza. Ad ogni modo condurrò i calcoli in maniera indipendente dall'ipotesi della decrescenza monotòna.

ordine d'idee pel quale, frequentemente gli integrali (2A) e (2B) si scrivono come presi tra limiti finiti, trascurando l'eredità dei tempi remoti. Ad ogni modo, col metodo del quale intendo fare uso, la sostituzione della φ vera con una φ artificialmente limitata e che si annulli fuori di un intervallo finito, non porterebbe semplificazione importante nei calcoli; quindi lascio alle ipotesi tutta la possibile generalità suggerita dall'esperienza.

Fin qui, sulla $\varphi(\theta)$. E in quanto all'andamento del nucleo coniugato $\psi(\theta)$, per determinarlo si può immaginare di esperimentare anche qui con una elongazione della forma $1(t)$, determinare la corrispondente reazione elastica $F_1(t)$, indi derivando e cambiando segno, ricavare la $\psi(t)$. Ne risultano le curve della fig. 2; salvo che l'esperienza è meno agevole di quella

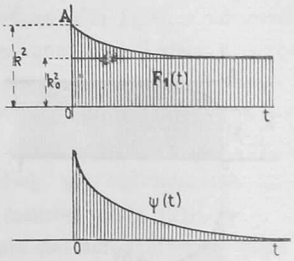

Fig. 2.

reciproca, e quindi piuttosto concettuale che reale; in ogni caso col calcolo (e nelle Note successive indicherò un metodo facile a questo scopo) si può dalla conoscenza della φ ricavare quella della ψ, come nucleo coniugato. Si rileva facilmente che i caratteri generali della ψ sono del tutto analoghi a quelli già indicati per la φ; i coefficienti h, h_0 sono sostituiti da $k = h^{-1}$, e da $k_0 = h_0^{-1}$; e vi è la stessa incertezza sul valore finito o infinito dell'ordinata iniziale.

4. Trasformazione mediante il calcolo degli operatori. — Le operazioni che figurano a secondo membro delle (3) sono commutabili con la derivazione $\Delta = \frac{d}{dt}$. Quindi [1] si possono applicare i teoremi che valgono pel calcolo simbolico degli operatori funzionali $f(\Delta)$, trattando Δ come se fosse un moltiplicatore. A tale scopo si deve porre [2]:

$$F(t - \theta) = e^{-\theta\Delta} F(t)$$

[1] Nota citata, *Sul calcolo* etc., parte generale.

[2] Nota citata *Sul calcolo* etc., § 2, art. 5, ove la formola è resa indipendente da ipotesi di analiticità dell'operando, purchè però la $e^{\theta\Delta}$ non venga sostituita col suo sviluppo in serie, applicato termine a termine.

qualunque sia la funzione F, analitica o non analitica. E le (3) assumono la forma simbolica

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
u(t) &= h^2 F(t) + \int_0^\infty \varphi(\theta)\, e^{-\theta\Delta}\, F(t)\, d\theta \\
F(t) &= k^2 u(t) - \int_0^\infty \psi(\theta)\, e^{-\theta\Delta}\, u(t)\, d\theta .
\end{aligned}
$$

Ma qui, in virtù del principio citato, è lecito di portar fuori le funzioni $F(t)$, $u(t)$ dal segno integrale, pur di posporle [1]. Quindi, raccogliendo i termini, si può scrivere

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
u(t) &= \{ h^2 + \Phi(\Delta) \}\, F(t) \\
F(t) &= \{ k^2 - \Psi(\Delta) \}\, u(t)
\end{aligned}
$$

dove si è posto

$$
(6)\qquad
\begin{aligned}
\Phi(\Delta) &= \int_0^\infty \varphi(\theta)\, e^{-\theta\Delta}\, d\theta \\
\Psi(\Delta) &= \int_0^\infty \psi(\theta)\, e^{-\theta\Delta}\, d\theta
\end{aligned}
$$

e questi simboli $\Phi(\Delta)$, $\Psi(\Delta)$, espressi sotto forma di funzioni analitiche [2] dall'operatore Δ, hanno significato di operatori funzionali che agiscono sulle $F(t)$, $u(t)$ rispettivamente.

5. Uso delle formule e valutazione dei risultati. — Dalla comparazione delle formole (5) con le (1), e dal fatto che i binomi simbolici a secondo membro delle (5) sono assoggettabili alle regole dell'algebra ordinaria, segue il teorema: *La risoluzione di qualunque problema di equilibrio elastico ereditario* (nelle ipotesi premesse di linearità e invariabilità) *si ottiene risolvendo il corrispondente problema statico non ereditario, e sostituendo nelle formole risolventi, ai singoli coefficienti di cedevolezza* h^2 *i corrispondenti binomi simbolici* $\{ h^2 + \Phi(\Delta) \}$, *ovvero ai reciproci coefficienti di rigidità* k^2 *i corrispondenti binomi* $\{ k^2 - \Psi(\Delta) \}$, *e « valutando » i risultati con le regole del calcolo operativo che si applicano agli* $f(\Delta)$

[1] « pur di posporle » perchè si conviene sempre che l'operando venga scritto dopo l'operatore.

[2] Dico « funzioni analitiche » perchè se anche Δ anzichè un simbolo di operazione rappresentasse una variabile complessa, gli integrali (6) sarebbero convergenti per ogni Δ che avesse positiva la parte reale, e definirebbero una funzione di Δ, olomorfa in un semipiano, e che si può immaginare completata col suo prolungamento analitico; lo spirito del metodo sta nel poter sostituire all'integrale ogni qualunque espressione che definisca la stessa funzione analitica, perchè solamente dai punti singolari di questa dipendono le proprietà dell'operatore che da essa è simboleggiato.

in generale. Mediante questo enunciato, ogni problema statico ereditario è ridotto a un problema non ereditario, senza necessità di ricerche speciali caso per caso.

Le regole di valutazione, nel caso concreto, si riassumono in quanto segue. Premettiamo che nel caso non ereditario, le incognite, in ogni risoluzione del problema, si ottengono espresse linearmente per mezzo di termini della forma $p_i F_i$, ovvero $q_i u_i$, dove F_i, u_i sono forze e spostamenti arbitrariamente dati, e i fattori p_i, q_i contengono gli h^2, k^2. Si passa al problema ereditario col sostituire nelle espressioni di p_i, q_i agli h^2, k^2 i binomi simbolici che contengono Δ. Si ottengono allora termini $p_i(\Delta) F_i(t)$, $q_i(\Delta) u_i(t)$, cioè in generale termini della forma $f(\Delta) F(t)$. Per interpretare questi termini vale la formola

$$f(\Delta) F(t) = \int_{-\infty}^{t} G(\theta) F(t-\theta) d\theta , \tag{7}$$

dove

$$G(\theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} f(\omega) e^{\omega\theta} d\theta \tag{8}$$

e questi sviluppi sono di regola convergenti; o sono divergenti sommabili e si traducono in convergenti coi metodi che ho indicato altra volta: p. es., ponendo $f(\Delta) = \Delta^n f_0(\Delta)$, e applicando le formole (7) (8) all'operatore $f_0(\Delta)$, e trattando Δ^n come una derivazione di ordine n da effettuare sul risultato.

Mediante queste formole, i singoli termini dei risultati vengono espressi (per quanto interessa t) per mezzo di tre quadrature al più [1]; e inoltre si ottiene il risultato diretto, senza scrivere le equazioni integrali o integro-differenziali. Ognuno di questi termini sostituisce una di quelle serie di integrali di ordine illimitatamente crescente, alle quali si è invece condotti coi metodi classici di risoluzione.

[1] Una quadratura è quella che figura nella espressione Φ o di Ψ date dalle formole (6); le altre due sono quelle delle formole (7) e (8). Nelle Note successive mostrerò poi come si possano realizzare le semplificazioni ulteriori, fino a ricavare le formole atte ai calcoli aritmetici.