ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCCIX.

1912

SERIE QUINTA

RENDICONTI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXI.

2° SEMESTRE.

ROMA

TIPOGRAFIA DELLA R. ACCADEMIA DEI LINCEI

PROPRIETÀ DEL CAV. V. SALVIUCCI

1912

Matematica. — *Sull'integrale di Dirichlet.* Nota della dottoressa ANGELA MARIA MOLINARI, presentata dal Corrispondente ALFONSO DI LEGGE [1].

1. Le condizioni alle quali deve soddisfare una funzione di variabile reale $\psi(x)$, per essere rappresentabile in serie od in integrale di Fourier, vengono precisate in quasi tutti i trattati di analisi o di fisica matematica [2], sotto la forma tipica di Dirichlet, od in modo poco diverso.

Esse si distinguono in *condizioni al finito*, comuni per la serie e per l'integrale, ed in *condizioni all'infinito*, speciali per l'integrale.

Le *condizioni all'infinito* furono accuratamente analizzate dal Pringsheim [3], il quale trovò che la formulazione fino allora universalmente accettata non era interamente esatta. Nuove condizioni rigorose furono date poi, dal prof. L. Orlando [4] e dalla sig.^{na} G. Graziani [5].

Non è inutile, credo, portare qualche analoga discussione anche sulle *condizioni al finito*, sulla loro dimostrazione e sulla possibile loro estensione.

Come è noto, esse dipendono tutte [6] dalla validità della così detta *formula integrale di Dirichlet*, cioè dalla seguente:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\lambda=\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \psi(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \psi(+0), \qquad (b > 0)$$

che contiene, come caso particolare, quest'altra:

$$\text{(B)} \qquad \lim_{\lambda=\infty} \int_a^b \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \psi(x)\, dx = 0\,. \qquad \left[\begin{matrix} 0 < a < b \\ a\,,\, b \text{ fissi} \end{matrix}\right]$$

Infatti, presupposta in ogni caso l'integrabilità assoluta della $\psi(x)$, si constata facilmente che, quando la formula (A) è verificata, essa può trasfor-

(1) Pervenuta all'Accademia il 12 settembre 1912.

(2) Mi riferirò, in particolare, al classico trattato di Riemann e Weber, *Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik*, V ediz., vol. I (Braunschweig, 1910).

(3) A. Pringsheim, *Ueber das Fourier'sche Integraltheorem*, Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung, vol. XVI (1907), pp. 2-16.

(4) L. Orlando, *Sulla formula integrale di Fourier*, Rendiconti Lincei, ser. 5ª, vol. XVII (1908), pp. 367-371; *Nuove osservazioni sulla formula integrale di Fourier*, ibid., vol. XVIII (1909), pp. 343-348.

(5) G. Graziani, *Sulla formula integrale di Fourier*, Rendiconti Lincei, ser. 5ª, vol. XVIII (1909), pp. 169-172; *Funzioni rappresentabili con la formula integrale di Fourier*, ibid., pp. 596-601.

(6) Cfr. Riemann-Weber, op. cit., vol. I, §§ 18-19 e 29-34 (ovvero §§ 17-18 e 27-32 della IV ediz.), od anche E. Picard, *Traité d'analyse*, vol. I (1901), cap. IX, pp. 235-258.

marsi, senza ulteriori condizioni (salvo, ove sia il caso, quelle all'infinito), in una opportuna serie od in un integrale di Fourier, che rappresenti $\psi(+0)$; e reciprocamente. Ne segue, se si prende per origine un punto x_0 qualunque, che le condizioni necessarie e sufficienti al finito, perchè gli sviluppi di Fourier siano validi in quel punto e rappresentino il valore

$$\frac{\psi(x_0-0)+\psi(x_0+0)}{2}$$

quando esso esiste, si riducono alla validità della formula di Dirichlet a destra e a sinistra di detto punto.

Si tratta dunque di precisare le condizioni di validità della formula (A).

La dimostrazione classica procede per gradi: si passa da una funzione $\psi(x)$ *limitata* e *monotona*, ad una funzione *illimitata*, ma *integrabile*, generalizzando poi, il risultato al caso in cui la funzione sia *monotona a tratti ed integrabile*.

Per condurre questa dimostrazione vi sono due metodi: *a*) quello originale di Dirichlet [1], che consiste nel suddividere l'integrale in tanti integrali, corrispondenti rispettivamente ai tratti dove sen λx è positiva e a quelli dove è negativa; *b*) quello di Ossian Bonnet, Du Bois Reymond, e C. Neumann, che si fonda sull'applicazione del secondo teorema della media.

Il secondo metodo è forse il più elementare: una forma tipica di dimostrazione, fatta con questo metodo, è appunto esposta nel Riemann-Weber. A prima vista però, non apparisce evidente il rigore di tutti i passaggi ivi effettuati, essendo necessario un continuo richiamo ai lemmi preliminari o ad altri equivalenti, per accertare la legittimità di tutte le inversioni di passaggi al limite che intervengono nei calcoli. Si può anche osservare che ad un certo punto [2] vi è una condizione sovrabbondante; si asserisce infatti, che la funzione $\psi(x)$ nell'intorno a sinistra di un punto di infinito conserva segno costante; ora di questa condizione (che nel caso particolare è soddisfatta) non si fa uso nella dimostrazione, ed essa rimane, restrizione non necessaria, o limitare le successive generalizzazioni. Conviene quindi cercare di rivedere tutto il processo deduttivo, e rimuovere queste difficoltà

Mi permetto qui di esporre una dimostrazione, non diversa nella sostanza, ma ridotta a forma che mi sembra molto semplice ed esente dalle dette obiezioni, e che si presta quindi alla generalizzazione che ne farò in seguito.

Come premessa, in luogo dei lemmi (1), (I), (II) del Riemann-Weber (§ 16 della V ediz., ovvero § 15 della IV ediz.), mi valgo solamente della formula

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,d\theta=\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

[1] Questo è il metodo seguìto dal Picard, loc. cit., e dal Goursat, *Cours d'analyse mathématique*, tomo I (1902), cap. IX, 196, pp. 464-472.

[2] Riemann-Weber, loc. cit., § 17, pag. 40 (ovvero § 16, pag. 35 della IV ediz.).

che suppongo nota dal calcolo, e da questa formula, senza lemmi intermedî ricavo ogni ulteriore conseguenza.

2. Sia $\psi(x)$ una funzione limitata e monotona, nell'intervallo $(0, b)$; queste condizioni portano con sè, come è noto, la numerabilità dei punti di discontinuità e quindi l'integrabilità riemanniana, e l'esistenza del valor limite $\psi(+0)$.

Scriviamo:

$$(2)\quad \int_0^b \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,\psi(x)\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{1}{\lambda}}} \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,\psi(x)\,dx + \int_{\sqrt{\frac{1}{\lambda}}}^b \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,\psi(x)\,dx\,,$$

ed applichiamo, ai due termini del secondo membro, il secondo teorema della media; avremo:

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,\psi(x)\,dx = \psi(+0)\int_0^{\xi} \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,dx +$$

$$+\psi\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}-0\right)\int_{\xi}^{\sqrt{\frac{1}{\lambda}}} \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,dx + \psi\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}+0\right)\int_{\sqrt{\frac{1}{\lambda}}}^{\zeta} \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,dx +$$

$$+\psi(b-0)\int_{\zeta}^{b} \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,dx\,,$$

dove ξ sarà un opportuno valore intermedio fra 0 e $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$, e similmente, ζ un opportuno valore compreso fra $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ e b.

Se poniamo, nella formula precedente, $\lambda x = \theta$, e raggruppiamo convenientemente gli integrali, otterremo:

$$\int_0^b \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,\psi(x)\,dx = \psi(+0)\int_0^{\sqrt{\lambda}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,d\theta +$$

$$+\left[\psi\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}-0\right)-\psi(+0)\right]\int_{\lambda\xi}^{\sqrt{\lambda}} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,d\theta +$$

$$+\psi\left(\sqrt{\frac{1}{\lambda}}+0\right)\int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda\zeta} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,d\theta + \psi(b-0)\int_{\lambda\zeta}^{b} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,d\theta\,.$$

Col tendere di λ all'∞, il primo termine del secondo membro tende verso $\frac{\pi}{2}\psi(+0)$. Nel secondo termine, l'espressione fra parentesi quadra tende a

zero, e l'integrale che la moltiplica, comunque ξ possa variare fra 0 e $\sqrt{\lambda}$, essendo un integrale della forma $\int_p^q \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,d\theta$, resta compreso fra limiti finiti [altrimenti l'integrale (1) non sarebbe convergente]. Gli altri due integrali, $\int_{\sqrt{\lambda}}^{\lambda\zeta} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,d\theta$ e $\int_{\zeta\lambda}^{b} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}\,d\theta$, sono integrali singolari [criterio di Cauchy applicato alla convergenza della (1)] e quindi tendono a zero.

Si ricava dunque la formula:

$$\text{(A)} \qquad \lim_{\lambda=\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen}\lambda x}{x}\,\psi(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\,\psi(+0).$$

In quanto alla (B), si può ottenerla, sia come conseguenza della formula (A), sia direttamente con un processo analogo a quello seguito per dimostrare l'annullarsi dei precedenti integrali. Anzi, di qui si vede che la (B) resta ancora valida se, invece di un limite inferiore a fisso, poniamo un limite variabile in funzione di λ, purchè, col tendere di questo limite a zero, il prodotto $a\lambda$ tenda all'∞ insieme con λ.

3. Le generalizzazioni che si fanno nelle trattazioni classiche, sono quelle che seguono:

a) $\psi(x)$ invece di essere limitata, divenga infinita al limite superiore b, purchè ivi il suo integrale resti convergente;

b) $\psi(x)$ nell'intervallo $(0\,,b)$ abbia un numero finito di punti di infinito, purchè fra un punto di infinito e l'altro sia monotona e resti convergente;

c) $\psi(x)$ sia tale che l'intervallo $(0\,,b)$ si possa dividere in un numero finito di intervalli, in ciascuno dei quali essa soddisfi alle condizioni precedenti (che, è bene osservare, portano di conseguenza l'integrabilità assoluta su tutto l'intervallo).

Queste condizioni hanno l'inconveniente di non essere *chiuse*, nel senso che, per combinazione lineare di funzioni che soddisfino alle condizioni *c*), si ottenga una funzione che vi soddisfi. È facile, infatti, ottenere, per semplice somma di due funzioni che soddisfino a *c*), una funzione con un numero infinito di massimi e minimi, e che pure verifica la formula di Dirichlet, perchè le operazioni di limiti e di integrali sono distributive.

Per quanto sia difficile dare condizioni necessarie, si può proporre il problema di ottenere condizioni che, pur essendo soltanto sufficienti, siano almeno *chiuse*, nel senso sopra indicato. Una risoluzione di questo problema si ottiene considerando la classe delle funzioni a variazione limitata (condizione di Jordan); una qualunque di queste funzioni, può sempre decomporsi in due altre monotone e limitate, e quindi verifica le formule (A)

e (B); per combinazione lineare di funzioni a variazione limitata, si ottengono ancora funzioni a variazione limitata, dunque la condizione di Jordan ha il vantaggio di essere *chiusa*. Ma, mentre da un certo punto di vista è più generale di quelle di Dirichlet, da un altro punto è meno generale, perchè esclude le funzioni illimitate.

4. Senza entrare nella discussione di condizioni che hanno carattere meno elementare, come quelle di Lipschitz, di Dini, di Lebesgue, etc., mi propongo di far seguire, alla dimostrazione che ho dato per le funzioni limitate e monotone, una generalizzazione che conduce immediatamente a un esteso gruppo di funzioni. Questo gruppo comprende, come caso particolare, le funzioni di Dirichlet, e quelle di Jordan, ed ha la proprietà di essere *chiuso* rispetto a qualunque operazione di somma, sottrazione o combinazione lineare.

Pongo le seguenti condizioni:

I. $\psi(x)$ sia assolutamente integrabile [1] nell'intervallo $(0, b)$;

II. $\psi(x)$ sia a variazione limitata in un intervallo finito $(0, \alpha)$, ciò che porta come conseguenza l'esistenza di $\psi(+0)$;

III. ogni altro punto di $(0, b)$ sia interno a qualche intervallo, non nullo, entro il quale la funzione sia pure a variazione limitata; faccia però eccezione un insieme di punti (necessariamente chiuso) che chiameremo *irregolari*, e questo insieme abbia misura nulla nel senso di Jordan.

Una funzione siffatta si potrà chiamare *a variazione limitata in generale*; resta inteso che nei punti irregolari la funzione può avere qualunque tipo di discontinuità, purchè sia assolutamente integrabile.

Voglio dimostrare che la funzione $\psi(x)$, così definita, verifica l'integrale di Dirichlet.

Per provarlo osserviamo che, in virtù delle ipotesi fatte e di teoremi noti, dato ε piccolo a piacere, è sempre possibile racchiudere quei punti irregolari, in un insieme σ, composto di un numero *finito* di segmenti, la cui somma sia $< \varepsilon$ e la cui minima distanza dal punto $x = 0$ sia finita. Dicendo allora Σ l'insieme residuo, questo risulta composto di un numero finito di intervalli finiti, nei quali la funzione ψ è a variazione limitata. Indichiamo ora con $\int_\Sigma$ un integrale preso fra 0 e b, e nel quale, invece di ψ, figuri una funzione eguale a ψ nei punti di Σ e nulla nei punti di σ, cioè una funzione che è ancora a variazione limitata nonostante i salti arti-

[1] Per la validità della dimostrazione basterebbe che questa integrabilità fosse nel senso di Lebesgue, ma le condizioni successive sono tali che portano di conseguenza la misura nulla (nel senso di Lebesgue) dell'insieme dei punti di discontinuità, e quindi l'integrabilità riemanniana.

ficiali introdotti, che sono finiti ed in numero finito. Similmente indichiamo con $\int_\sigma$ un integrale consimile esteso all'insieme complementare σ.

Potremo allora scrivere:

$$(3) \qquad \lim_{\lambda=\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \psi(x)\, dx = \lim_{\lambda=\infty} \int_\Sigma \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \psi(x)\, dx + \\ + \lim_{\lambda=\infty} \int_\sigma \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \psi(x)\, dx .$$

Il primo limite a secondo membro è $= \frac{\pi}{2} \psi(+0)$, perchè per esso vale la condizione di Jordan e perchè il punto $x = 0$ appartiene all'insieme Σ. Quanto al secondo termine, poichè vale la relazione

$$\left| \int_\sigma \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \psi(x)\, dx \right| < \int_\sigma \left| \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \psi(x) \right| dx < \int_\sigma \frac{|\psi(x)|}{|x|} dx ,$$

e poichè $|\psi(x)|$ essendo integrabile sull'insieme σ (che è a distanza finita dal punto $x = 0$) anche $\frac{|\psi(x)|}{|x|}$ risulta integrabile, ne viene di conseguenza [1] che scegliendo la misura di σ sufficientemente piccola, si può rendere l'integrale in questione, minore di una quantità positiva, piccola a piacere e indipendente da λ.

Otterremo dunque

$$\lim_{\lambda=\infty} \int_0^b \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{x} \psi(x)\, dx = \frac{\pi}{2} \psi(+0),$$

come volevamo dimostrare. Analogamente valgono le formule accessorie (B) per limiti fissi, e (B) per limiti variabili, come nel caso di ψ funzione limitata e monotona.

Con riferimento ai risultati combinati di Riemann e di Lebesgue, ed alle osservazioni che ho fatto in principio sul legame fra le condizioni per gli sviluppi di Fourier e per la formula di Dirichlet, si potrebbe poi dimostrare che la formula di Dirichlet vale anche quando siano soddisfatte *semplicemente* le condizioni I, II, senza necessità della III; ma la dimostrazione diretta, si presenta tutt'altro che semplice, e in ogni caso non deducibile per generalizzazione del risultato dimostrato per le funzioni monotone.

[1] In virtù di un teorema dato da C. J. de la Vallée-Poussin nella sua Memoria fondamentale: *Recherches sur la convergence des intégrales définies*, Journal de Mathématiques, ser. IV, vol. VIII (1892), pp. 421-467; v. Teorema II, pag. 428, art. 15.